Matematika Dasar

Edisi Revisi

Penulis
Deasy Sandhya Elya Ikawati
Cahya Rahmad
Adevian Fairus

CERDAS ULET KREATIF
www.cerdas.co.id

Matematika Dasar
Edisi Revisi

Copyrights © 2026. All Rights Reserved
Hak cipta dilindungi undang-undang

Penulis:
Deasy Sandhya Elya Ikawati
Cahya Rahmad
Adevian Fairus

Penyunting:
Dhega Febiharsa

Desain & Tata Letak:
Tim Penerbit Cerdas Ulet Kreatif

ISBN : **978-623-8025-43-5**
Cetakan Pertama : **2026**
Penerbit :
CV. Cerdas Ulet Kreatif
Jl. Manggis 72 RT 03 RW 04 Jember Lor - Patrang
Jember - Jawa Timur 68118
Telp. 0331-4431347, 412387 Faks. 4431347
e-mail : info@cerdas.co.id

Distributor Tunggal:
CV. Cerdas Ulet Kreatif
Jl. Manggis 72 RT 03 RW 04 Jember Lor - Patrang
Jember - Jawa Timur 68118
Telp. 0331-4431347, 412387 Faks. 4431347
e-mail : info@cerdas.co.id

Undang-Undang RI Nomor 19 Tahun 2002
Tentang Hak Cipta

Ketentuan Pidana
Pasal 72 (ayat 2)
Barang Siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran Hak Cipta atau hak terkait sebagaimana dimaksud pada ayat (1), dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp. 500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

KATA PENGANTAR

Dengan mengucap syukur Alhamdulillah, akhirnya selesai juga pembuatan buku ini. Tidak lupa penulis mengucapkan terimakasih kepada pihak yang telah berkontribusi atas penerbitan buku ini. Penulis juga mengucapkan terimakasih kepada teman-teman serta keluarga yang telah berkontribusi dalam pembuatan buku ini.

Dengan mempelajari buku ini, diharapkan pembaca dapat memperoleh pengetahuan mengenai dasar-dasar matematika yang digunakan dalam berbagai bidang.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa penulisan ini masih jauh dari sempurna dan tidak luput dari kekurangan. Oleh sebab itu diharapkan adanya saran dan kritik demi kesempurnaannya.

Tiada gading yang tak retak, begitu juga dengan buku ini yang masih banyak kekurangannya. Untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang membangun, sehingga bisa dilakukan perbaikan. Akhir wakalam penulis menyampaikan terima kasih atas bantuan dari berbagai pikah, hanya Allah SWT yang mampu membalasnya. Dan bagi yang mempelajari buku ini, semoga bermanfaat dan selamat belajar.

Penulis,

Malang, 2 Mei 2026

DAFTAR ISI

BAB 1

HIMPUNAN

Suatu **himpunan** dapat dianggap sebagai kumpulan objek yang terdefinisi dengan baik. Objek dalam himpunan disebut sebagai **anggota** atau **elemen** himpunan.

Dengan kata lain, jika diberikan suatu objek kita dapat menentukan apakah objek tersebut anggota dari himpunan yang dideskripsikan atau bukan. Elemen-elemen himpunan dapat berupa objek apa saja, mulai dari yang paling familiar seperti, bilangan, nama orang, jenis bunga, atau nama negara di suatu benua. Suatu himpunan bahkan mungkin memiliki himpunan lain sebagai elemennya. Huruf kapital A, B, X, Y yang digunakan untuk menunjukkan nama-nama himpunan, sedangkan huruf kecil a, b, x, y untuk menunjukkan objek yang dipandang sebagai kemungkinan elemen himpunan.

METODE UNTUK MENULISKAN HIMPUNAN :

1. Metode Roster (*Roster Method*)

   Pada metode ini, himpunan dituliskan dengan mendaftarkan semua elemennya, yang dipisahkan oleh tanda koma, dengan diapit oleh tanda kurung kurawal.

   Contoh :

   $A = \{5, 3, 4, 7\}$ atau $B = \{biru, hitam, hijau\}$ adalah himpunan yang masing-masing terdiri dari empat dan tiga elemen yang dituliskan dengan metode roster.

Catatan Penting !

1) Urutan elemen yang dicantumkan tidak diperhatikan
2) Elemen cukup dicantumkan sekali dalam daftar karena mencantumkannya lebih dari sekali tidak mengubah himpunan.

Contoh :

Himpunan $\{3, 3, 7\}$ sama dengan himpunan $\{3, 7\}$, sehingga representasi $\{3, 3, 7\}$ tidak pernah digunakan.

2. Metode Deskripsi (*Rule Method*)

Pada metode ini, himpunan dituliskan dengan mendeskripsikan satu atau lebih sifat-sifat pada elemen himpunan. Deskripsi tersebut dirumuskan dalam apa yang disebut dengan *set-builder notation* atau **notasi pembentuk himpunan**, yaitu dalam bentuk

$$A = \{x | x \text{ memenuhi sifat yang ditentukan}\}$$

yang dibaca "A adalah himpunan semua objek x dimana x memenuhi …".

Contoh :

$$C = \{x | x \text{ adalah bilangan bulat dan } x < 50\}$$
$$D = \{x | x \text{ adalah nama kota di Indonesia dimulai dengan huruf } M\}$$
$$X = \{x | x \text{ adalah kecamatan yang ada di Kota Magelang}\}$$

3. Simbol Baku

Dalam matematika, himpunan yang paling sering digunakan adalah himpunan yang elemennya adalah objek matematika, termasuk diantaranya adalah himpunan yang anggotanya adalah bilangan. Dalam hal ini, terdapat himpunan bilangan tertentu yang sering digunakan yang berfungsi sebagai himpunan semesta sehingga ditetapkan nama dan simbolnya. Himpunan bilangan tersebut dinotasikan sebagai berikut.

a. $\mathbb{N}$ merupakan himpunan $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ yang terdiri dari bilangan bulat positif (bilangan asli).

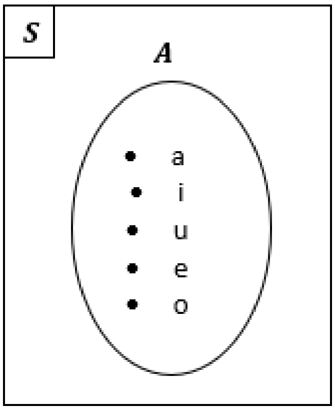
b. $\mathbb{Z}$ merupakan himpunan $\{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ yang terdiri dari semua bilangan bulat.
c. $\mathbb{Q}$ merupakan himpunan semua bilangan rasional (pembagian bilangan bulat).
d. $\mathbb{R}$ merupakan himpunan semua bilangan riil.
e. $\mathbb{C}$ merupakan himpunan semua bilangan kompleks.

4. Diagram Venn

Himpunan dapat digambarkan menggunakan **diagram Venn**. Diagram Venn akan melibatkan satu, dua, ataupun tiga himpunan yang diwakili oleh lengkungan tertutup sederhana berlabel nama himpunan di dalam segi empat yang mewakili himpunan semesta dan anggotanya digambarkan dengan noktah. Anggota dari suatu himpunan terletak di dalam daerah lengkungan tertutup sederhana atau di luar daerah lengkungan tertutup sederhana (tetap di dalam persegi panjang) untuk anggota yang tidak termasuk dalam himpunan tersebut.

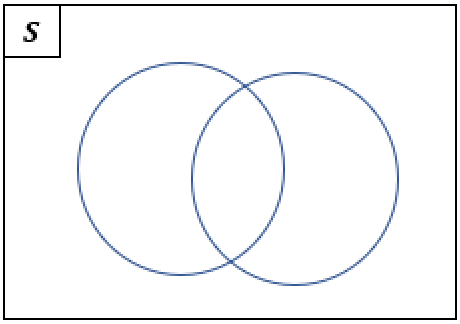
Contoh :

Diagram Venn himpunan $A = \{a, i, u, e, o\}$.



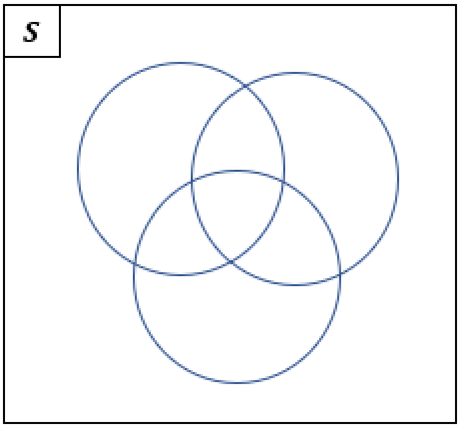
Gambar 1. Diagram Venn Himpunan A

Contoh diagram Venn yang melibatkan dua himpunan.



Gambar 2. Diagram Venn Dua Himpunan

Contoh diagram Venn yang melibatkan tiga himpunan.



Gambar 3. Diagram Venn Tiga Himpunan

MACAM-MACAM HIMPUNAN

1. ***Power Set (Himpunan Kuasa)***.

> Diberikan A sebagai suatu himpunan. Himpunan kuasa dari A merupakan himpunan dari semua subset dari himpunan A dan dinotasikan dengan $P(A)$.

Contoh: Himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ maka himpunan kuasa dari A adalah

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

2. ***Empty Set (Himpunan Kosong)***. Himpunan yang tidak memiliki anggota, sehingga tidak terdapat objek yang dapat disebut sebagai anggota dari himpunan yang dideskripsikan dan dinotasikan dengan $\{\ \}$ atau $\emptyset$.

   Contoh: Himpunan $A = \{x|x < 2, x \in bilangan\ prima\} = \{\ \}$

3. ***Equality***.

   > Himpunan A dan B dikatakan *equal* atau sama jika dan hanya jika setiap elemen dari A juga merupakan elemen dari B dan setiap elemen dari B juga merupakan elemen B.

   Pernyataan A sama dengan B dilambangkan dengan $A = B$, yang berarti bahwa A dan B memiliki elemen yang sama persis.

   Contoh: Misalkan terdapat himpunan $A = \{4, 7, 9\}$ dan $B = \{4, 7, 9\}$, sehingga dapat dikatakan bahwa $A = B$ karena setiap anggota A yaitu $4, 7,$ dan 9 juga merupakan anggota dari himpunan B, begitupula sebaliknya.

4. ***Subset (Himpunan Bagian)***.

   > Himpunan A dan B dinyatakan dengan A subset B, dinotasikan dengan $A \subseteq B$, memiliki arti bahwa setiap elemen A juga merupakan elemen dari B.

   Dengan kata lain, tidak semua anggota pada himpunan B juga anggota dari himpunan A. Sedangkan A bukan subset dari B dinotasikan dengan $A \nsubseteq B$.

Contoh : Misal himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{x | x \text{ } adalah \text{ } bilangan \text{ } asli, x < 11\}$, sehingga $A \subseteq B$ karena setiap anggota himpunan A yaitu, $1, 2, 3, 4, 5$ juga merupakan anggota himpunan B. Akan tetapi, $B \nsubseteq A$ karena ada anggota dari himpunan B yaitu, $6, 7, 8, 9$ yang bukan anggota dari himpunan A.

5. ***Proper Subset***.

Ketika membicarakan $A \subseteq B$ terdapat kemungkinan bahwa elemen himpunan A sama persis dengan himpunan B. Sehingga, muncul istilah dan notasi untuk kasus tersebut.

Himpunan A dan B dinyatakan dengan A proper subset B, dinotasikan dengan $A \subset B$, jika dan hanya jika $A \subseteq B$ tetapi $A \neq B$. Sedangkan A bukan proper subset B dinotasikan dengan $A \not\subset B$.

Contoh : Misal himpunan $A = \{senin, kamis, jum'at\}$ dan $B = \{senin, selasa, rabu, kamis, jum'at, sabtu\}$, sehingga $A \subset B$. Sedangkan jika diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4\}$, maka $A \not\subset B$, karena himpunan A dan B memiliki elemen yang sama persis, akan tetapi $A \subseteq B$.

OPERASI HIMPUNAN

Seperti bilangan yang dapat digabungkan dengan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian, pada himpunan ada beberapa operasi yang dapat diterapkan, yaitu:

a) Gabungan
b) Irisan
c) Selisih
d) Komplemen
e) Beda Setangkup
f) Hasil Kali Kartesius

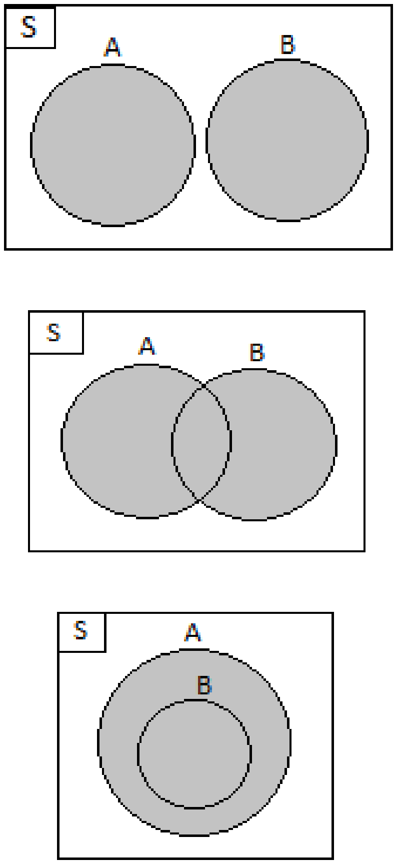
a) GABUNGAN

Definisi

Misal A dan B adalah himpunan. Gabungan dari A dan B adalah himpunan

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad atau \quad x \in B\}$$

Representasi operasi gabungan dalam Diagram Venn :



Gambar 4. Representasi Operasi Gabungan Dalam Diagram Venn

Contoh :
Misal $S = \{3, 5, 6, 8\}$, $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dan $U = \{3, 7, 8\}$. Carilah $S \cup T$ dan $T \cup U$.

$S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
$T \cup U = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$

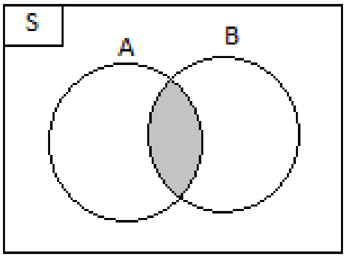
b) IRISAN

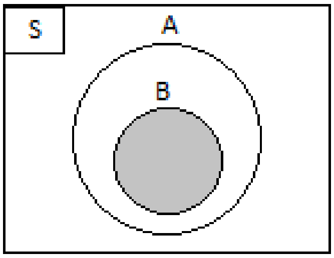
Definisi

Misal A dan B adalah himpunan. Gabungan dari A dan B adalah himpunan

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad atau \quad x \in B\}$$

Representasi operasi irisan dalam Diagram Venn :





Gambar 5. Representasi Operasi Irisan Dalam Diagram Venn

Contoh :

Misal $S = \{2, 3, 4, 6, 8\}$, $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dan $U = \{12, 18, 20\}$. Carilah $S \cap T$ dan $T \cap U$.

$S \cap T = \{2, 3, 4\}$
$T \cap U = \{\ \}$

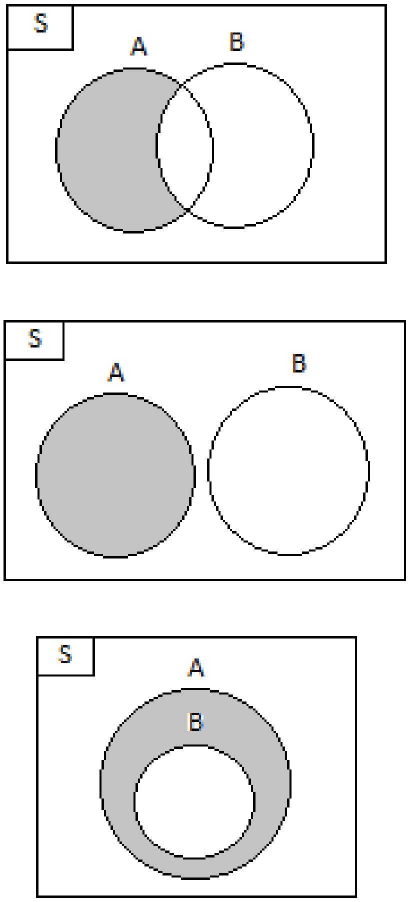
c) SELISIH

Definisi

Misal A dan B adalah himpunan. Selisih dari A dan B adalah himpunan

$$A - B = \{x \mid x \in A \quad dan \quad x \notin B\}$$

Representasi operasi selisih dalam Diagram Venn :



Gambar 6. Representasi Operasi Selisih Dalam Diagram Venn

Contoh :

Misal $S = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dan $U = \{7, 9, 11\}$. Carilah $S - T$ dan $T - U$.

$S - T = \{6, 8, 10\}$

$T - U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

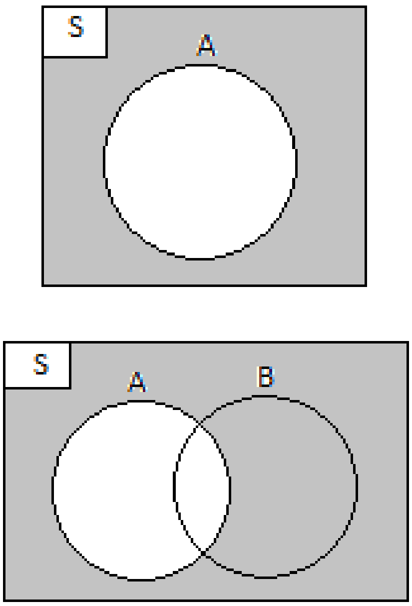
d) KOMPLEMEN

Definisi

Misal A adalah subset himpunan semesta S. Komplemen himpunan A, yang dinotasikan dengan A', adalah himpunan

$$A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$$

Representasi operasi komplemen dalam Diagram Venn :



Gambar 7. Representasi Operasi Komplemen Dalam Diagram Venn

Contoh :

Jika P adalah himpunan bilangan asli, dimana himpunan semesta S adalah himpunan bilangan bulat. Maka komplemen himpunan P adalah

$$P' = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$

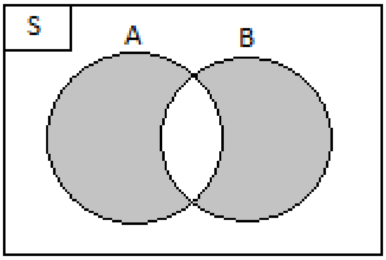
e) BEDA SETANGKUP

Definisi

Misal A dan B adalah himpunan. Beda setangkup, yang dinotasikan dengan $A \oplus B$, adalah himpunan

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

Representasi operasi beda setangkup dalam Diagram Venn :



Gambar 8. Representasi Operasi Beda Setangkup Dalam Diagram Venn

Contoh :

Misal $S = \{2, 5, 6, 8\}$ dan $T = \{1, 2, 3, 4, 8\}$. Carilah $S \oplus T$.

$S \oplus T = (S - T) \cup (T - S)$

$\qquad = \{5, 6\} \cup \{1, 3, 4\}$

$\qquad = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

f) HASIL KALI KARTESIUS

Definisi

Misal A dan B adalah himpunan. Hasil kali kartesius, yang dinotasikan dengan $A \times B$ adalah himpunan

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Contoh :

Diberikan himpunan $A = \{3, 7\}$ dan $B = \{a, b, c\}$, maka

$$A \times B = \{(3, a), (3, b), (3, c), (7, a), (7, b), (7, c)\}$$

UJI KOMPETENSI

1. Jika $A = \{1, 4, 7, 8, 9\}$ dan $C = \{2, 4, 8\}$, maka $A \cap C =$ ...
2. Diketahui $U = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$, $A = \{1, 7, 9\}$, $B = \{2, 5, 9, 10\}$ maka B' adalah ...

3. Jika $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ dan $C = \{5, 6, 8, 9\}$, carilah $(A \cup B) \cap C =$ ...

4. Berapakah $|A|$ jika A adalah himpunan bilangan asli yang kurang dari 10?

5. D adalah bilangan asli yang kurang dari 1, maka anggota himpunan D adalah...

6. Diketahui semesta S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, A = {2, 4, 6, 8}, dan B = {1, 2, 3, 4, 5}. Tentukan hasil dari: $(A \cup B' \cap A)$

7. Pernyataan berikut yang benar jika $S = \{x | x\ adalah\ faktor\ dari\ 8\}$, dan $T = \{1, 2, 4, 6\}$ adalah ...
   a. $S \sim T$

b. $T \subseteq S$
c. $S = T$
d. $S \cap T = \{1, 2, 4, 6\}$
e. $S \cup T = \{1, 2, 4\}$

8. Jika $D = \{x |\ x < 6,\ x \in bilangan\ asli\}$, maka $|P(D)| = \cdots$
a. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
b. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
c. $\{\}$
d. 32
e. 5

9. Jelaskan apa yang dimaksud dengan himpunan saling lepas (*disjoint set*), serta berikan satu contoh himpunan yang saling lepas dan satu contoh yang tidak saling lepas!

10. Diketahui $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, dan $C = \{ 1, 3, 5, 7, 9\}$, maka $B \times (A - C) =$ ...

1001 alasan bagi mereka yang enggan maju, tapi hanya ada 1 alasan bagi mereka yang mau bangkit yaitu beri aku kesempatan.

Kesempatan datang dua kali, satu kali untuk dicoba dan yang kedua untuk diperbaiki.

- Frengky, 2012 -

BAB 2

RELASI

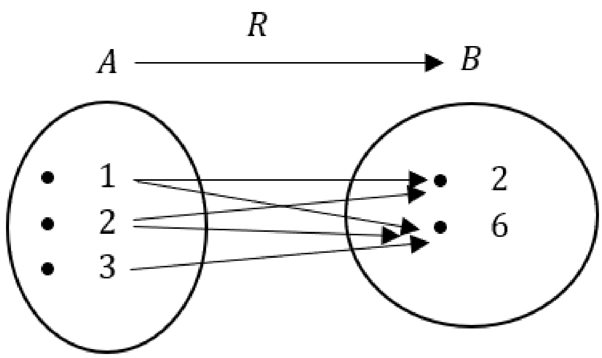
Konsep relasi dari himpunan A ke himpunan B pada dasarnya merupakan konsep dari pasangan berurutan (x, y), hasil dari cartesian product $A \times B$ dari himpunan A dan B. Suatu objek x merupakan elemen dari $A \times B$ jika dan hanya jika $x = (a, b)$ dimana a elemen himpunan A dan b elemen himpunan B.

Definisi

Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah sebarang subset dari $A \times B$

Contoh: Diketahui himpunan $A = \{1,2,3\}$ dan himpunan $B = \{2,6\}$. Relasi R dari A ke B didefinisikan dengan $a \in A$ habis membagi $b \in B$ adalah

$$R = \{(1,2), (1,6), (2,2), (2,6), (3,6)\}$$



Gambar 9. Diagram Panah Relasi R

Domain relasi R dari himpunan A ke himpunan B merupakan himpunan yang terdiri dari elemen-elemen A yang merupakan elemen pertama dari pasangan berurutan di R atau $dom\ R = \{x \in A | x\ R\ y\ untuk\ suatu\ y \in B\}$.

Range relasi R dari himpunan A ke himpunan B merupakan himpunan yang terdiri dari elemen-elemen B yang merupakan elemen kedua dari pasangan berurutan di R atau $range\ R = \{y \in B | x\ R\ y\ untuk\ suatu\ x \in A\}$. Dengan kata lain, ketika R adalah relasi dari A ke B, domain R adalah subset dari himpunan A dan range R adalah subset dari himpunan B.

RELASI INVERS

Definisi

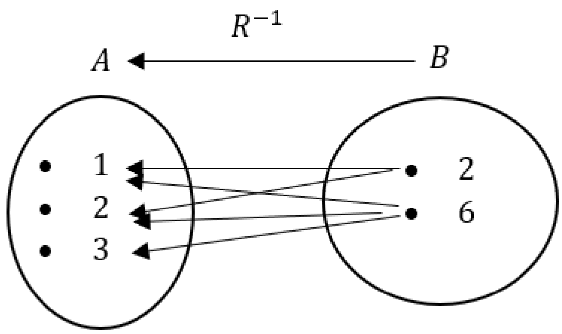
Relasi invers R dari himpunan A ke himpunan B yang dinotasikan dengan R^{-1} merupakan relasi dari B ke A.

Dengan kata lain, R^{-1} diperoleh dengan membalik semua pasangan berurutan di R, $R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$.

Contoh :

Menggunakan relasi R dari himpunan A ke himpunan B pada contoh sebelumnya, dimana $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{2,6\}$, diperoleh $R = \{(1,2), (1,6), (2,2), (2,6), (3,6)\}$, maka invers dari R adalah

$R^{-1} = \{(2,1), (6,1), (2,2), (6,2), (6,3)\}$



Gambar 10. Diagram Panah Relasi R^{-1}

UJI KOMPETENSI

1. Diketahui himpunan $A = \{4, 8, 12, 16\}$ dan himpunan $B = \{2,4,6\}$, tentukanlah relasi R dari A ke B yang didefinisikan dengan $a \in A$ merupakan kelipatan dari $b \in B$!
2. Diketahui himpunan $A = \{2, 4, 6, 7, 9\}$ dan himpunan $B = \{1, 3, 4, 8\}$. Tentukan R yang merupakan relasi dari A ke B dimana $R = \{(a, b) | a\ dan\ b\ memiliki\ sifat\ yang\ sama\ (keduanya\ genap\ atau\ keduanya\ ganjil\}$
3. Diketahui himpunan $A = \{2, 4, 6\}$ dan himpunan $B = \{p, q, r, s\}$ dengan relasi dari A ke B adalah $R = \{(a, b) | b = r, a \in A\ dan\ b \in B\}$. Tentukan range dari relasi tersebut!
4. Diketahui himpunan $A = \{a | 2 < a < 10, x \in \mathbb{N}\}$ dan himpunan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dengan $R = \{(a, b) | b = \frac{1}{3}a, a \in A, b \in B\}$ merupakan relasi dari A ke B. Tentukan domain dan range dari relasi R!
5. Diketahui himpunan $A = \{x | x\ adalah\ bilangan\ bulat\ antara\ - \\ -3\ dan\ 7\}$ dan $B = \{y + 2 | 1 \leq y < 6, y \in bilangan\ asli\}$ dengan

relasi dari A ke B adalah $R = \{(a, b) | a = \frac{1}{2}b, a \in A, b \in B\}$. Tentukan invers dari relasi tersebut!

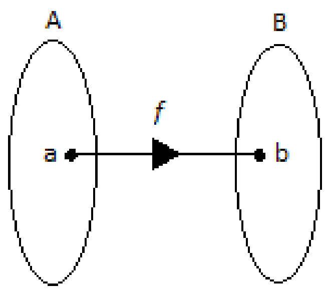
Kekuatan kita terletak pada kecepatan kita merespons kegagalan. Yang lemah akan tetap diam dan hanya mampu meratap ketika dia jatuh, sedangkan yang kuat akan segera bangkit dan bercermin dari kegagalannya.

BAB 3

FUNGSI

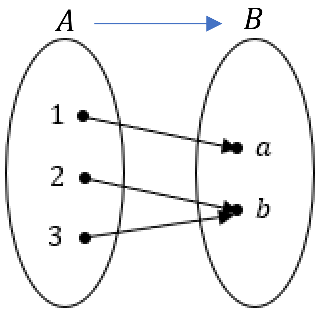
Definisi

Misalkan A dan B adalah himpunan. Fungsi f dari A ke B, yang dinotasikan dengan $f: A \to B$, adalah relasi dimana setiap $a \in A$ dihubungkan dengan tepat satu elemen $b \in B$.



Gambar 11. Diagram Panah Fungsi f

1. Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b\}$, maka $f = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$ merupakan fungsi dari A ke B meskipun $b \in B$ terhubung dengan dua elemen pada A, yaitu 2 dan 3.

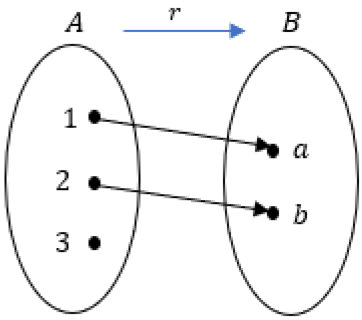


Gambar 12. Diagram Panah Fungsi f

2. $y = x^2 + 1$ adalah fungsi karena untuk setiap $x \in R$ (domain) terdapat tepat satu $y \in R$ (range).

Bukan Contoh :

1. Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b\}$, maka $g = \{(1, a), (2, b)\}$ bukan merupakan fungsi (relasi) karena terdapat satu elemen A yang tidak dihubungkan ke elemen di B.



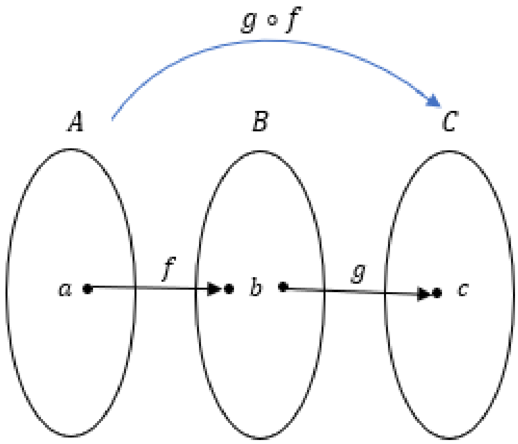
Gambar 13. Diagram Panah Bukan Fungsi

2. $y^2 - 1 = x$ bukan fungsi karena ada $x \in R$ (domain), yaitu $x = 5$, terhubung dengan dua elemen $y \in R$, yaitu $y = -2$ dan $y = 2$.

KOMPOSISI DUA FUNGSI

Definisi

Misalkan $f: A \to B$ dan $g: B \to C$ adalah fungsi dimana kodomain f sama dengan domain g, yaitu $b \in B$. Komposisi f dengan g, yang dinotasikan $g \circ f$, adalah fungsi dari $a \in A$ ke $c \in C$ dan $g \circ f = g\big(f(a)\big)$, sehingga $g \circ f: A \to C$



Gambar 14. Diagram Komposisi Dua Fungsi

Contoh :

1. Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{u, v, w\}$ dan $C = \{x, y, z\}$, fungsi g merupakan fungsi dari A ke B sehingga $g = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$ dan fungsi f merupakan fungsi dari B ke C sehingga $f = \{(u, y), (v, x), (w, z)\}$. Maka $f \; o \; g = f\big(g(a)\big) = \{(1, y), (2, z), (3, x)\}$

2. Jika $f(x) = -3x + 2$ dan $g(x) = x^2 + 2$, maka $(f \circ g)(x) =$ ....

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

$$= f(x^2 + 2)$$

$$= -3(x^2 + 2) + 2$$

$$= -3x^2 - 6 + 2 = -3x^2 - 4$$

Jadi, $(f \circ g)(x) = -3x^2 - 4$

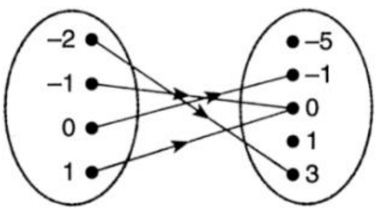
UJI KOMPETENSI

1. $S = \{(1,2), (3,4), (5,6), (7,8)\}$ dan $T = \{(2,3), (4,5), (6,7), (8,9)\}$, maka $T \circ S =$...

2. Perhatikan himpunan berpasangan berikut :
   1) $\{(1, a), (2, b), (3, b)\}$
   2) $\{(1, a), (1, b), (3, c)\}$
   3) $\{(2,4), (4,8), (6,12)\}$
   4) $\{(2,4), (2,8), (6,12)\}$

   Yang merupakan contoh fungsi adalah . . .

3. Pemetaan $f : A \to B$ digambarkan oleh gambar berikut.



   Domain dan range f masing-masing adalah . . .

4. Diketahui $f(x) = 3x + 2$ dan $g(x) = x^2 - 1$, tentukan $(f \circ g)(x) =$ . . .

5. Jika $f(x) = x - 2$ dan $g(x) = 2x^2 + 3$, maka $(g \circ f)(x) = . . .$

Tak seorang pun dapat memotivasi diri kita selain diri kita sendiri, karenanya pahamilah dirimu!

Harga kualitas manusia dinilai dari kesanggupannya untuk bangkit dalam jatuhnya.

- Frengky, 2012 -

BAB 4

PENDAHULUAN MATRIKS

Definisi

Matriks adalah susunan bilangan berbentuk persegi panjang.

Angka-angka dalam susunan tersebut disebut **entri matriks**. **Ukuran atau ordo** suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (garis horizontal) dan kolom (garis vertikal) yang termuat di dalamnya.

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Matriks pada contoh di atas memiliki ukuran 3×2 (3 kali 2) dan ukuran matriks pada contoh kedua adalah 2×2 (2 kali 2).

Dalam deskripsi ukuran, angka pertama selalu menunjukkan jumlah baris dan yang kedua menunjukkan angka kolom. Notasi ukuran matriks dapat dituliskan sebagai $M_{n \times m}$ (matriks dengan ukuran $n \times m$). Pada contoh di atas berturut-turut dapat dituliskan $M_{3 \times 2}$ dan $M_{2 \times 2}$.

Entri yang terdapat pada baris i dan kolom j dari matriks A dilambangkan dengan a_{ij}. Secara umum, matriks dengan ukuran $n \times m$ dituliskan sebagai,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Entri pada baris i dan kolom j dari matriks A secara umum dinotasikan dengan simbol $(A)_{ij}$.

Contoh : Pada matriks

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

didapatkan $(A)_{11} = -5, (A)_{12} = 3, (A)_{21} = -4,$ dan $(A)_{22} = 8.$

JENIS-JENIS MATRIKS

1. **Matriks Persegi.** Matriks dengan n baris dan n kolom disebut sebagai matriks persegi berorde n dan entri yang ditebalkan dan berwarna biru seperti di bawah disebut sebagai diagonal utama dari matriks A.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a_{nm}} \end{pmatrix}$$

   Contoh : $\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

2. **Matriks Baris**, matriks yang hanya terdiri dari satu baris.
   Contoh: $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

3. **Matriks Kolom,** matriks yang hanya terdiri dari satu kolom.
   Contoh: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. **Matriks Nol,** matriks yang semua entrinya merupakan bilangan nol.
   Contoh: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. **Matriks Diagonal**, matriks persegi dimana semua elemen selain elemen diagonal utamanya adalah angka nol.
   Contoh: $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

6. **Matriks Identitas,** matriks diagonal dimana semua elemen pada diagonal utamanya adalah angka satu.

   Contoh: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. **Matriks Segitiga Atas,** matriks persegi yang semua elemen di bawah diagonal utamanya adalah angka nol.

   Contoh: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

8. **Matriks Segitiga Bawah,** matriks persegi yang semua elemen di atas diagonal utamanya adalah angka nol.

   Contoh: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

PERSAMAAN DUA MATRIKS

Dua matriks dikatakan sama jika keduanya memiliki ukuran (ordo) yang sama dan entri yang berkorespondensi sama. Persamaan dua matriks $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ dengan ukuran yang sama dapat dituliskan dengan $(A)_{ij} = (B)_{ij}$ atau $a_{ij} = b_{ij}$, berlaku untuk semua nilai i dan j.

Contoh :

Jika $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ 2 \end{pmatrix}$, maka nilai $x = 2, y = 1$, dan $z = 3$

UJI KOMPETENSI

1. Tuliskan matriks yang memiliki entri-entri $a_{11} = 7, a_{12} = -10, a_{21} = -5, a_{22} = 4$!

2. Jika diketahui matriks A merupakan matriks persegi dengan $a_{12} = 3$ dan matriks $D = (1 \quad 3 \quad 5)$, apakah $A = D$? Jelaskan!

3. Tentukan apakah matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a & y \end{pmatrix}$ sama dengan matriks $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ y & a \end{pmatrix}$? Jelaskan!

4. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 2 & 5 & b \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, matriks $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ c & 4 & -2 \end{pmatrix}$, dan $A = B$. Tentukanlah nilai $a - b + c$!
   a. 5
   b. -5
   c. 7
   d. 11
   e. -11

5. Diketahui matriks $X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 6 & b \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} -4 & c \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, dan $X = Y = Z$. Tentukan nilai dari $x + a + b.c$!
   a. -12
   b. 0
   c. -6
   d. 1
   e. -1

You've always had the power my dear, you just had to learn it for yourself

- Glinda, The Wizard of Oz –

Don't tell people your dreams. Show them.
- Mel Robbins –

BAB 5

OPERASI MATRIKS

Terdapat beberapa operasi yang dapat diterapkan pada matriks, yaitu:

a) Penjumlahan

b) Pengurangan

c) Perkalian

d) Transpos

1. PENJUMLAHAN MATRIKS

Penjumlahan matriks dilakukan dengan menjumlahkan entri-entri yang bersesuaian.

Definisi

Diberikan dua matriks A dan B berorde $m \times n$, maka hasil penjumlahannya adalah

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

Catatan : Penjumlahan matriks dapat dilakukan apabila matriks-matriks tersebut memiliki ordo yang sama.

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 10 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+2 & -3+5 & 5+(-6) \\ -3+10 & 2+4 & 0+(-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 \\ 7 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Sifat-Sifat Penjumlahan Matriks

1) **Komutatif** : $A + B = B + A$
2) **Asosiatif** : $A + (B + C) = (A + B) + C$
3) Matriks Nol adalah matriks **identitas penjumlahan**.

$$A + 0 = 0 + A = A$$

4) Memiliki matriks **invers**. Matriks invers diperoleh dengan mengganti setiap elemen matriks dengan kebalikannya.

$$A + (-A) = (-A) + A = 0$$

2. PENGURANGAN MATRIKS

Pengurangan matriks dilakukan dengan mengurangkan entri-entri yang bersesuaian.

Definisi

Diberikan dua matriks A dan B berorde $m \times n$, maka hasil pengurangannya adalah

$$A - B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$$

Catatan : Pengurangan matriks dapat dilakukan apabila matriks-matriks tersebut memiliki ordo yang sama.

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 9 & 5 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & -7-4 & 5-(-6) \\ -4-9 & 5-5 & 0-(-8) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -11 & 11 \\ -13 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Sifat-Sifat Pengurangan Matriks

1) **Komutatif** : $A - B \neq B - A$

2) **Asosiatif** : $A - (B - C) = (A - B) - C$

3. PERKALIAN MATRIKS

Terdapat dua macam perkalian dalam matriks, yaitu perkalian dengan bilangan real (skalar) dan perkalian dua matriks.

a) Perkalian dengan Bilangan Real

Hasil kali bilangan real k dan matriks A diperoleh dengan mengalikan setiap entri matriks A dengan bilangan k, hasil kali matriks dinotasikan dengan kA. Bilangan k disebut **skalar**.

Contoh :

Tentukan hasil dari $-4A$, dimana $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

$$-4A = -4\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4).-2 & (-4).0 \\ (-4).-3 & (-4).5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 12 & -15 \end{pmatrix}$$

Sifat-Sifat Perkalian dengan Bilangan Skalar

1) **Asosiatif** : $(kl)A = k(lA)$

2) **Distributif** : $k(A + B) = kA + kB$

$$(k + l)A = kA + lA$$

b) Perkalian Dua Matriks

Untuk matriks A berordo $m \times n$ dan matriks B berordo $n \times p$, matriks hasil kali AB berordo $m \times p$.

Definisi

Misal diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan matriks $B = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix}$, maka

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + bs & aq + bt & ar + bu \\ cp + ds & cq + dt & cr + du \end{pmatrix}$$

Catatan : Perkalian dua matriks hanya dapat dilakukan ketika banyaknya kolom matriks pertama sama dengan banyaknya baris matriks kedua.

Contoh :

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, tentukan

a. AB

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriks A tidak dapat dikalikan dengan matriks C karena banyaknya kolom matriks A tidak sama dengan banyaknya baris matriks B

b. AC

Matriks A berordo 2×2 dan matriks C berordo 2×1, sehingga matriks AC akan berordo 2×1.

$$AC = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.(-1) + (-2).2 \\ 4.(-1) + 5.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - 4 \\ -4 + 10 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Sifat-Sifat Perkalian Dua Matriks

1) **Tidak Komutatif** : $AB \neq BA$

2) **Asosiatif** : $A(BC) = (AB)C$

3) **Distributif** : $A(B + C) = AB + AC$

$$(B + C)A = BA + CA$$

4. TRANSPOS

Transpos matriks merupakan matriks yang diperoleh dengan menukarkan baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris. Transpos matriks dinotasikan dengan A^T.

Definisi

Misal matriks $A = \begin{pmatrix} a & \dots & n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \dots & m \end{pmatrix}$, maka

$$A^T = \begin{pmatrix} a & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \dots & m \end{pmatrix}$$

Contoh :

Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 6 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$, maka $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ -4 & 2 & -7 \end{pmatrix}$

UJI KOMPETENSI

1) Matriks $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, tentukan $A^T B = \dots$

2) Jika matriks $S = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$ dan $T = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$, maka $S - T = \dots$

3) Matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$ dan matriks $B = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, maka matriks $2A + B = \cdots$

4) Hitunglah $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \cdots$

5) Jika matriks $P = (-2 \quad -3 \quad 5)$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan $T = PQ$, maka matriks T adalah ...

The harder you are on yourself, the easier life is on you. Or, as they say in the Navy Seals, the more you sweat in peacetime, the less you bleed in war.

- Steve Chandler -

BAB 6

DETERMINAN MATRIKS

Determinan matriks hanya dimiliki oleh matriks persegi. Determinan matriks digunakan ketika mencari invers matriks dan ketika menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan aturan cramer.

DETERMINAN DARI MATRIKS 2×2

Definisi

Determinan dari matriks $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dinotasikan dengan $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ dan didefinisikan sebagai

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Contoh:

Determinan dari matriks $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ adalah

$$\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 8.\left(-\frac{1}{2}\right) - (-3).5 = -4 + 15 = 11$$

DETERMINAN DARI MATRIKS 3×3

Determinan matriks 3×3 dapat dicari menggunakan dua cara, yaitu menggunakan **Metode Sarrus** dan menggunakan **Kofaktor**.

1. Metode Sarrus

Determinan suatu matriks 3×3 dapat ditentukan dengan efisien menggunakan suatu pola yang disebut sebagai **aturan Sarrus**.

Mula-mula kolom pertama dan kedua disalin ke samping matriks seperti pada gambar di atas. Determinan matriks tersebut dapat dihitung melalui hasil kali entri yang dilalui panah biru dan dikurangi dengan hasil kali entri yang dilalui panah warna merah.

Pola tersebut dapat dilihat sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Definisi

Jika diketahui matriks berukuran 3×3, sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

maka determinan matriks tersebut adalah

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Contoh :

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 2.(-1).(-2) + 5.4.1 + 3.6.5 - 3.(-1).1$$
$$-2.4.5 - 5.6.(-2)$$

$$= 4 + 20 + 90 + 3 - 40 + 60 = 137$$

Hasil determinan tersebut dapat diverifikasi kesamaannya dengan metode kofaktor sebelumnya.
Sebagai catatan, aturan Sarrus tidak berlaku untuk penentuan determinan matrik 4×4 atau yang lebih besar.

2. Determinan Matriks 3×3 Menggunakan Kofaktor

Determinan dari matriks persegi juga dapat ditentukan dengan mencari nilai minor dan kofaktor dari matriks tersebut.

Minor

Minor untuk setiap elemen matriks dinotasikan dengan M_{ij} dimana i adalah letak baris dan j adalah letak kolom.

Pada matriks persegi $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$, minor M_{ij} dari suatu entri a_{ij} adalah determinan dari matriks yang dibentuk dengan menghapus baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks $\boldsymbol{A}$.

Contoh : Diketahui matriks $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 6 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, nilai minor M_{11} dari matriks tersebut ditentukan dengan menghapus baris pertama dan kolom pertama, kemudian menentukan determinan matriks 2×2 yang dibentuk entri-entri yang tersisa.

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 6 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -1.(-2) - 5.4 = 2 - 20 = -18$$

Nilai minor M_{23} dari matriks tersebut ditentukan dengan menghapus baris kedua dan kolom ketiga, kemudian menentukan determinan matriks 2×2 yang dibentuk entri-entri yang tersisa.

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 6 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2.5 - 1.(-5) = 10 + 5 = 15$$

Kofaktor

Kofaktor untuk setiap elemen matriks dinotasikan dengan C_{ij}.

Pada matriks persegi $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$, kofaktor C_{ij} dari suatu entri a_{ij} ditentukan dengan

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

dimana M_{ij} adalah minor dari a_{ij}.

Contoh :

Dari matriks yang sudah dibahas pada contoh sebelumnya, yaitu $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 6 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, kofaktor C_{11} ditentukan dengan menggunakan M_{11} yang telah ditemukan $M_{11} = -18$, sehingga

$$C_{11} = (-1)^{1+1}(-18) = (1).(-18) = -18$$

Kemudian kofaktor C_{23} ditentukan dengan menggunakan M_{23} yang telah ditemukan $M_{23} = 15$, sehingga

$$C_{23} = (-1)^{2+3}(15) = (-1).(15) = -15$$

***Determinan Matriks* 3×3**

Determinan dari matriks $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ dinotasikan dengan $|\boldsymbol{A}|$ atau $det(A)$ dapat ditentukan dengan memilih sebarang baris atau kolom, mengalikan setiap elemen dalam baris atau kolom tersebut dengan kofaktornya, dan menambahkan hasil-hasil kali yang dihasilkan. Cara tersebut disebut dengan ekspansi sepanjang baris ke-i atau ekspansi sepanjang kolom ke-j.

Definisi

Ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i:

$$de\,t(A) \;=\; a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3}$$

Ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j:

$$det(A) \;=\; a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j}$$

Contoh : Diketahui matriks $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$,

determinan matriks dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-1 adalah

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= 2.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 5.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \\ &\quad 3.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2.1.(-18) + 5.(-1).(-16) + 3.1.31 \\ &= (-36) + 80 + 93 = 137 \end{aligned}$$

determinan matriks dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-2 adalah

$$|\boldsymbol{A}| = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

$$= 5.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1).(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 5.(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$= 5.(-1).(-16) + (-1).1.(-7) + 5.(-1).(-10)$
$= 80 + 7 + 50 = 137$

UJI KOMPETENSI

1. Tentukan determinan dari matriks $\begin{pmatrix} -5 & \sqrt{16} \\ \sqrt{16} & 3 \end{pmatrix}$!
2. Jika diketahui $|A| = -14$ dan $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & a \end{pmatrix}$, tentukan nilai a!
3. Diketahui $A = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 4 & -6 & 7 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, tentukanlah $|A|$ menggunakan ekspansi baris ke-3!
4. Tentukan determinan $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ menggunakan metode sarrus!
5. Tentukan determinan matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ menggunakan ekspansi kolom ke-1!

Only challenge causes growth. Only challenge will test our skills and make us better. Only challenge and the self-motivation to engage the challenge will transform us. Every challenge we face is an opportunity to create a more skillful self.

- Steve Chandler -

BAB 7

INVERS MATRIKS

Untuk matriks A berordo $n \times n$, jika terdapat matriks A^{-1} sedemikian sehingga

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

maka A^{-1} adalah matriks invers dari A. A^{-1} dibaca A invers.

Catatan : Tidak semua matriks memiliki invers, hanya matriks persegi dengan determinan tidak sama dengan 0 (nol) yang memiliki invers. Matriks yang tidak memiliki invers disebut **Matriks Singular**.

Secara umum, invers matriks persegi adalah sebagai berikut

Definisi

Diberikan matriks persegi A, maka invers matriks A adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A)$$

dimana

$\det(A)$: determinan matriks A

$Adj(A)$: adjoin matriks A

- **Adjoin matriks $\boldsymbol{A}$** untuk matriks A berordo 2×2, jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ maka

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- **Adjoin matriks $\boldsymbol{A}$** untuk matriks A berordo 3×3 adalah transpos dari matriks kofaktor A, sehingga
  jika $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ maka $Adj(A) = C^T$

  dimana C adalah kofaktor matriks A

$$C = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Contoh :

1. Diberikan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Invers dari matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$dapat dihitung dengan rumus berikut:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Dimana:

- $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$, dan $d = 4$.

Langkah pertama adalah menghitung **determinan** dari matriks A:

$$\det(A) = ad - bc$$
$$\det(A) = (2)(4) - (3)(1) = 8 - 3 = 5$$

Karena determinannya $\det(A) = 5$dan tidak sama dengan nol, matriks A **memiliki invers**.

Langkah kedua adalah menggunakan rumus untuk menghitung inversnya:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

2. Diberikan matriks Asebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Tentukan **invers** dari matriks A.

Penyelesaian:

Untuk menghitung invers dari matriks 3x3, kita akan menggunakan **metode kofaktor** dan **adjoin**. Invers dari matriks Adapat dihitung dengan rumus:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A)$$

Dimana:

det(A) adalah determinan dari matriks A,

adj(A) adalah adjoin dari matriks A, yaitu transpos dari matriks kofaktor.

Langkah 1: Hitung Determinan dari Matriks A

Determinan matriks 3x3 Adihitung dengan rumus:

$$\det(A) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

Dengan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, kita memiliki:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Menentukan elemen-elemen:

$a = 1, b = 2, c = 3$

$d = 0, e = 1, f = 4$

$g = 5, h = 6, i = 0$

Sekarang, kita hitung determinannya:

$$\det(A) = 1 \cdot ((1)(0) - (4)(6)) - 2 \cdot ((0)(0) - (4)(5)) + 3 \cdot ((0)(6) - (1)(5))$$

$$\det(A) = 1 \cdot (0 - 24) - 2 \cdot (0 - 20) + 3 \cdot (0 - 5)$$

$$\det(A) = 1 \cdot (-24) - 2 \cdot (-20) + 3 \cdot (-5)$$

$$\det(A) = -24 + 40 - 15 = 1$$

Karena determinannya **1**, matriks Adapat diinverskan.

Langkah 2: Hitung Matriks Kofaktor

Untuk menghitung **kofaktor**, kita harus menentukan matriks minor untuk setiap elemen, dan kemudian memberikan tanda positif atau negatif sesuai dengan posisi elemen tersebut dalam matriks.

Matriks kofaktor dari Aadalah sebagai berikut (membuat minor untuk setiap elemen):

$$C_{11} = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = (1)(0) - (4)(6) = -24$$

$$C_{12} = -\det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = -(0 - 20) = 20$$

$$C_{13} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (0)(6) - (1)(5) = -5$$

$$C_{21} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = -((2)(0) - (3)(6)) = 18$$

$$C_{22} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = (1)(0) - (3)(5) = -15$$

$$C_{23} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = -((1)(6) - (2)(5)) = -(6 - 10) = 4$$

$$C_{31} = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (2)(4) - (3)(1) = 8 - 3 = 5$$

$$C_{32} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = -((1)(4) - (3)(0)) = -4$$

$$C_{33} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1)(1) - (2)(0) = 1$$

Jadi, matriks kofaktor Cadalah:

$$C = \begin{pmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Langkah 3: Hitung Matriks Adjoin

Matriks **adjoin** adalah transpos dari matriks kofaktor C:

$$\text{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Langkah 4: Hitung Invers Matriks A

Sekarang kita dapat menghitung **invers** dari matriks Adengan rumus:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

Karena $\det(A) = 1$, kita hanya perlu mengalikan matriks adjoin dengan $\frac{1}{1}$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUSI PERSAMAAN LINEAR

Invers matriks dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Karena pada perkalian matriks tidak berlaku komutatif, maka hal itu berpengaruh pada penyelesaian persamaannya.

Sehingga

$AX = B$ maka $X = A^{-1}B$

$XA = B$ maka $X = B\,A^{-1}$

Contoh :

Gunakan invers matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linear berikut ini.

Diberikan sistem persamaan linear berikut:

$$2x_1 + 3x_2 = 5$$
$$4x_1 + x_2 = 6$$

Tentukan solusi untuk $x_1$dan $x_2$dengan menggunakan **matriks**.

Langkah-langkah Penyelesaian:

1. **Tulis Sistem Persamaan dalam Bentuk Matriks:**

Sistem persamaan linear dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Dimana:

- Matriks koefisien adalah $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
- Matriks variabel adalah $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
- Matriks hasil adalah $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

2. **Mencari Matriks Invers A^{-1}:**

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear ini, kita dapat mengalikan kedua sisi persamaan dengan invers dari matriks koefisien A:

$$A^{-1}A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Karena $A^{-1}A = I$(matriks identitas), maka:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Sekarang, kita perlu mencari **invers** dari matriks A. Matriks invers A^{-1}untuk matriks 2x2 dapat dihitung dengan rumus:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Untuk matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, kita punya:

- $a = 2$
- $b = 3$
- $c = 4$
- $d = 1$

Langkah pertama adalah menghitung determinan det(A):

$$\det(A) = (a)(d) - (b)(c) = (2)(1) - (3)(4) = 2 - 12 = -10$$

Langkah kedua adalah menghitung invers A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

3. **Menghitung Solusi:**

Sekarang kita dapat menghitung solusi $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$dengan mengalikan invers matriks A^{-1}dengan matriks hasil $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Melakukan perkalian matriks:

$$x_1 = \left(-\frac{1}{10} \times 5\right) + \left(\frac{3}{10} \times 6\right) = -\frac{5}{10} + \frac{18}{10} = \frac{13}{10} = 1.3$$
$$x_2 = \left(\frac{2}{10} \times 5\right) + \left(-\frac{1}{5} \times 6\right) = \frac{10}{10} - \frac{6}{5} = 1 - 1.2 = -0.2$$

Hasil:

Solusi dari sistem persamaan linear adalah:

$$x_1 = 1.3, x_2 = -0.2$$

UJI KOMPETENSI

1. Carilah invers matriks D jika $D = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Nilai $(A + B)^{-1}$ adalah . . .

3. Jika matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, invers dari matriks AB adalah ...

4. Diketahui $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. Jika $R = P + Q$, maka invers R adalah ...
5. Matriks $A = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, jika $AX = B$, maka matriks X adalah ...

Arahan hidup kita ada pada cara kita memilih dalam berpikir.
Mereka yang mudah membenci, mudah serakah adalah mereka yang sedang sakit. Karena itu mereka layak dikasihi agar segera waras.

- Frengky, 2012 -

BAB 8

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINER: METODE GAUSS

Bentuk umum Sistem Persamaan Linear :

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}\right\}$$

dapat dinyatakan sebagai perkalian matriks

$$AX = B$$

dimana A adalah **matriks koefisien**, X adalah **matriks variabel** x, dan B adalah **matriks konstanta**, yaitu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Sistem persamaan linear dapat dituliskan menjadi **Matriks yang Diperluas (*Augmented Matrix*)** yang berbentuk :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Matriks yang diperluas ini diperoleh dari matriks koefisien yang diperluas dengan menambahkan satu kolom matriks konstanta.

Solusi dari sistem persamaan linear dapat diperoleh dengan menggunakan **Metode Gauss**.

Definisi

Metode Gauss merupakan metode dimana bentuk matriks yang diperluas diubah menjadi bentuk matriks segitiga atas atau segitiga bawah menggunakan **Operasi Baris Elementer (OBE)**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_m \end{pmatrix}$$

Ciri-ciri matriks Metode Gauss :

1. Pada setiap baris, bilangan atau entri tak nol pertama adalah 1 dan disebut 1 utama.
2. Jika ada baris yang entri-entrinya adalah nol (baris nol), maka baris tersebut diletakkan di baris paling bawah.
3. Pada dua baris yang berurutan, letak 1 utama pada baris yang lebih bawah terletak lebih kanan dari baris yang lebih atas.

Secara khusus, **Operasi Baris Elementer (OBE) dilakukan dengan :**

1. Mengalikan baris dengan bilangan konstanta tak nol.
2. Menukarkan posisi dua baris.
3. Menambahkan hasil kali konstanta dan satu baris dengan baris lainnya.

ALGORITMA METODE GAUSS

1. Buat matriks A, dan vektor B dengan ukuran n
2. Augmented matriks $[A|B]$ beri nama A
3. Pada beris ke i dengan $i = 1$ s/d n, lihat apakah nilai $a_{i,i}$ berisi nol.
   - Jika benar : tukar baris ke i dengan baris ke $i + k \leq n$
   - Jika tidak : lanjutkan pada baris ke j, dengan $j = i + 1\ s/d\ n$ kerjakan operasi baris elementer. Hitung :

$$c = \frac{a_{j,\,i}}{a_{i,\,i}}$$

   Hitung juga : $a_{j,\,k} = a_{j,\,k} - c.\,a_{i,\,k}$ pada kolom k dimana $k = 1$ s/d $n + 1$

4. Cari akar, dimana $i = n$ s/d 1
5. $x_i = \frac{1}{a_{i,i}}(b_i - a_{i,\,i+1}\,x_{i+1} - a_{i,\,j+2}\,x_{i+2} - \ .\ .\ .\ - a_{i,n}\,x_n$ dengan nilai $i + k \leq n$

Contoh :

Tentukan solusi dari sistem persamaan berikut menggunakan Metode Gauss.

Diberikan sistem persamaan linear berikut:

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$$
$$4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6$$
$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3$$

Tugasnya adalah **menyelesaikan sistem persamaan** ini menggunakan **Metode Gauss**, yang berfokus pada pembelajaran dan hasil yang diinginkan.

3. Penyelesaian dengan Metode Gauss

Langkah pertama adalah menulis sistem persamaan dalam bentuk matriks augmented:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Langkah 1: Eliminasi Elemen di Bawah Pivot

- Gunakan baris pertama untuk mengeliminasi elemen di bawahnya.
- Bagi baris pertama dengan 3(pivot pertama).

$$\text{Baris 1} \rightarrow \frac{1}{3} \times \text{Baris 1}$$

Hasilnya menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 4 & -3 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Langkah 2: Eliminasi Elemen di Bawah Pivot

- Gunakan baris pertama untuk mengeliminasi elemen $x_1$pada baris kedua dan ketiga.
  - Baris kedua: Baris 2 → Baris 2 $-$ 4 × Baris 1
  - Baris ketiga: Baris 3 → Baris 3 $+$ 2 × Baris 1

Setelah eliminasi, kita akan memperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{13}{3} \end{bmatrix}$$

Langkah 3: Menyelesaikan Elemen Kedua (Pivot Kedua)

- Bagi baris kedua dengan $-\frac{13}{3}$, sehingga elemen pivot pada $x_2$menjadi 1.

$$\text{Baris 2} \rightarrow \frac{3}{-13} \times \text{Baris 2}$$

Hasilnya menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{13} & -\frac{2}{13} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{13}{3} \end{bmatrix}$$

Langkah 4: Eliminasi Elemen di Bawah Pivot Kedua

- Gunakan baris kedua untuk mengeliminasi elemen $x_2$pada baris pertama dan ketiga.
  - Baris pertama: Baris 1 → Baris 1 $-\frac{2}{3} \times$ Baris 2
  - Baris ketiga: Baris 3 → Baris 3 $-\frac{5}{3} \times$ Baris 2

Setelah eliminasi, kita akan memperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{13} & -\frac{2}{13} \\ 0 & 0 & \frac{15}{13} & \frac{16}{13} \end{bmatrix}$$

Langkah 5: Menyelesaikan Elemen Ketiga (Pivot Ketiga)

Solusi:

Dari matriks identitas yang terbentuk, kita dapat melihat solusi untuk x_1, x_2, dan x_3:

$$x_1 = 2, x_2 = -\frac{2}{13}, x_3 = \frac{16}{15}$$

UJI KOMPETENSI

Carilah solusi sistem persamaan linear berikut menggunakan Metode Gauss!

1. $x - 2y = 10$

   $x - 2y = 10$
   $2x - y = 9$

2. $3x + y + 2z = 4$
   $x - 2y + 3z = 4$
   $x - 3y - 3z = -2$

3. $x + 2y = 1$
   $2x - 2y = -11$

4. $x + 2y + 6z = 2$
   $2x - 3y + 2z = 5$
   $2x + y + 5z = 3$

5. $-2x + 3y = 10$
   $4x + 2y = 5$

You are braver than you believe, stronger than you seem, and smarter than you think

- AA Milne -

Rule your mind, or it will rule you.

- Horace -

BAB 9

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINER: METODE GAUSS JORDAN

Bentuk umum Sistem Persamaan Linear :

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

dapat dinyatakan sebagai perkalian matriks

$$AX = B$$

dimana A adalah **matriks koefisien**, X adalah **matriks variabel** x, dan B adalah **matriks konstanta**, yaitu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Sistem persamaan linear dapat dituliskan menjadi **Matriks yang Diperluas (*Augmented Matrix*)** yang berbentuk :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Matriks yang diperluas ini diperoleh dari matriks koefisien yang diperluas dengan menambahkan satu kolom matriks konstanta.

Selain menggunakan Metode Gauss, solusi dari sistem persamaan linear dapat diperoleh dengan menggunakan **Metode Gauss Jordan**.

Definisi

Metode Gauss Jordan merupakan metode dimana bentuk matriks yang diperluas diubah menjadi bentuk matriks segitiga atas atau segitiga bawah menggunakan **Operasi Baris Elementer (OBE)**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_m \end{pmatrix}$$

Ciri-ciri matriks Metode Gauss Jordan :

1. Pada setiap baris, bilangan atau entri tak nol pertama adalah 1 dan disebut 1 utama.
2. Jika ada baris yang entri-entrinya adalah nol (baris nol), maka baris tersebut diletakkan di baris paling bawah.
3. Pada dua baris yang berurutan, letak 1 utama pada baris yang lebih bawah terletak lebih kanan dari baris yang lebih atas.
4. Jika terdapat 1 utama pada setiap kolom, maka entri yang lain adalah nol

Secara khusus, **Operasi Baris Elementer (OBE) dilakukan dengan :**

1. Mengalikan baris dengan bilangan konstanta tak nol.
2. Menukarkan posisi dua baris.
3. Menambahkan hasil kali konstanta dan satu baris dengan baris lainnya.

ALGORITMA METODE GAUSS JORDAN

1. Buat matriks A, dan vektor B dengan ukuran n
2. Buat augmented matriks $[A|B]$ dan beri nama A
3. Pada baris ke i dimana $i = 1, \ \ldots, n$
   a. Apakah nilai $a_{i,i}$ sama dengan nol :
      ya : tukar baris ke i dan baris ke $i + k \leq n \ n$
      tidak : lanjut ke bagian berikutnya
   b. Buat semua diagonalnya bernilai satu, dengan cara setiap kolom k dimana
      $k = 1, \ \ldots, n + 1$, hitung $a_{i,k} = \frac{a_{i,k}}{a_{i,i}}$
4. Pada baris ke j dimana $j = i + 1 \, , \ \ldots, n$

   Lakukan operasi baris elementer untuk kolom k dimana $k = 1, \ \ldots, n$
   Hitung $c = a_{j,i}$
   Hitung $a_{j,k} = a_{j,k} - c.a_{i,k}$
5. Solusi, untuk $i = n, \ \ldots, 1$

   $x_i = a_{i,\,n+1}$

Contoh :

Tentukan solusi dari sistem persamaan berikut menggunakan Metode Gauss Jordan.

Diberikan sistem persamaan linear berikut:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$$
$$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6$$
$$-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

Gunakan Metode Gauss-Jordan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear ini.
Penyelesaian:
Metode Gauss-Jordan adalah metode eliminasi matriks untuk mencari solusi sistem persamaan linear. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:
Langkah 1: Tulis sistem persamaan dalam bentuk matriks augmented.
Sistem persamaan dapat ditulis dalam bentuk matriks augmented seperti ini:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Langkah 2: Lakukan eliminasi untuk membuat elemen-elemen di bawah dan di atas elemen utama (pivot) menjadi 0.

- Langkah pertama: Gunakan baris pertama untuk mengeliminasi elemen di bawah elemen pertama (pivot $a_{11} = 2$).
    - Bagi baris pertama dengan 2 untuk mendapatkan pivot menjadi 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.5 & -0.5 & 2.5 \\ 4 & -2 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Langkah kedua: Gunakan baris pertama untuk mengeliminasi elemen di bawah pivot a_{11}(yaitu x_1).
    - $R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1$
    - $R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1$

- $R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.5 & -0.5 & 2.5 \\ 0 & -8 & 5 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Langkah 3: Lakukan eliminasi lagi untuk membuat elemen-elemen di bawah dan di atas elemen kedua (pivot $a_{22} = -8$) menjadi 0.

- Langkah pertama: Bagi baris kedua dengan -8 untuk mendapatkan pivot menjadi 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.5 & -0.5 & 2.5 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

- Langkah kedua: Gunakan baris kedua untuk mengeliminasi elemen-elemen di atas dan di bawah pivot a_{22}.
  - $R_1 \rightarrow R_1 - 1.5R_2$
  - $R_3 \rightarrow R_3 - 4R_2$

$$R_1 \rightarrow R_1 - 1.5R_2$$
$$R_3 \rightarrow R_3 - 4R_2$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Langkah 4: Lakukan eliminasi terakhir untuk membuat elemen a_{33}menjadi 1.

- Bagi baris ketiga dengan 3 untuk mendapatkan pivot menjadi 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Langkah 5: Gunakan baris ketiga untuk mengeliminasi elemen a_{23}di atasnya.

- $R_2 \rightarrow R_2 + \frac{5}{8}R_3$

$$R_2 \rightarrow R_2 + \frac{5}{8}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hasil akhir:
Matriks telah tereduksi ke bentuk identitas, dan solusi untuk sistem persamaan linear adalah:

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2$$

UJI KOMPETENSI

Carilah solusi sistem persamaan linear berikut menggunakan Metode Gauss Jordan!

1. $x - 2y = 10$
   $2x - y = 9$

2. $3x + y + 2z = 4$
   $x - 2y + 3z = 4$
   $x - 3y - 3z = -2$

3. $x + 2y = 1$
   $2x - 2y = -11$

4. $x + 2y + 6z = 2$
   $2x - 3y + 2z = 5$
   $2x + y + 5z = 3$

5. $-2x + 3y = 10$
   $4x + 2y = 5$

There will always be someone who can’t see your wort.
Don’t let it be you.
Speak from your heart, even if your voice shakes.

- Mel Robbins -

BAB 10

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINER: METODE GAUSS SIEDEL

Bentuk umum Sistem Persamaan Linear :

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}$$

Selain Metode Gauss dan Gauss Jordan, solusi dari sistem persamaan linear dapat diperoleh dengan menggunakan **Metode Seidel**.

Definisi

Metode Seidel merupakan metode yang menggunakan proses iterasi hingga diperoleh nilai-nilai yang berubah. Dari bentuk sistem persamaan linear, diberikan nilai awal setiap $x_i \ (i = 1 \ sampai \ n)$, kemudian persamaan linear diatas dituliskan :

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n)$$

....

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn}x_{n-1})$$

Proses iterasi terus dilakukan hingga nilai untuk setiap x_i $(i = 1\ sampai\ n)$ sudah sama dengan nilai x_i pada iterasi sebelumnya atau jika selisih nilai x_i $(i = 1\ sampai\ n)$ dengan nilai x_i pada iterasi sebelumnya kurang dari nilai toleransi eror yang ditentukan, maka akan diperoleh penyelesain sistem persamaan linearnya.

ALGORITMA METODE GAUSS SIEDEL

1. Nyatakan matriks A, dan vektor B dan n sebagai ukurannya
2. Buat batas iterasi maksimum yaitu max
3. Buat toleransi eror ε
4. Buat nilai awal dari x_i, pada $i = 1, \ldots, n$
5. Simpan x_i dalam s_i, pada $i = 1, \ldots, n$
6. Pada $i = 1, \ldots, n$ hitung

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j\right)$$

   dan

$$e_i = |x_i - s_i|$$

7. Ubah nilai iterasi dengan iterasi $\leftarrow$ iterasi $+ 1$
8. Jika iterasi sudah melebihi max atau error telah tercapai untuk i=1 s/d n hentikan proses dan hasilnya adalah x_i pada i=1 s/d n. jika tidak ulangi langkah (5)

Contoh :

Tentukan solusi dari sistem persamaan berikut menggunakan Metode Seidel.

Diberikan sistem persamaan linear berikut:

$$3x_1 + 4x_2 = 7$$
$$2x_1 + x_2 = 4$$

Gunakan **Metode Seidel** untuk menghitung solusi dari sistem ini dengan **3 iterasi**, dimulai dengan tebakan awal $x_1^{(0)} = 0$dan $x_2^{(0)} = 0$.

Penyelesaian:

Metode **Gauss-Seidel** atau **Seidel** adalah metode iteratif yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Di dalam metode ini, nilai $x_1$diperbarui terlebih dahulu, kemudian x_2, dan proses ini diulang sampai nilai konvergen.

Langkah-langkah yang harus diikuti:

1. Tentukan bentuk setiap persamaan untuk setiap variabel.
2. Lakukan iterasi sesuai dengan urutan yang diminta.

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Dari persamaan pertama:

$$3x_1 + 4x_2 = 7$$

Maka:

$$x_1 = \frac{7 - 4x_2}{3}$$

2. Dari persamaan kedua:

$$2x_1 + x_2 = 4$$

Maka:

$$x_2 = 4 - 2x_1$$

Iterasi pertama (tebakan awal: $\boldsymbol{x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0}$):

Menghitung nilai baru:

- $x_1^{(1)} = \frac{7-4(0)}{3} = \frac{7}{3} \approx 2.333$

- $x_2^{(1)} = 4 - 2(2.333) = 4 - 4.666 = -0.6667$

Iterasi kedua (tebakan dari iterasi pertama: $\boldsymbol{x_1^{(1)} = 2.333}$, $\boldsymbol{x_2^{(1)} = -0.6667}$):

Menghitung nilai baru:

- $x_1^{(2)} = \frac{7-4(-0.6667)}{3} = \frac{7+2.6668}{3} = \frac{9.6668}{3} \approx 3.222$
- $x_2^{(2)} = 4 - 2(3.222) = 4 - 6.444 = -2.444$

Iterasi ketiga (tebakan dari iterasi kedua: $\boldsymbol{x_1^{(2)} = 3.222}$, $\boldsymbol{x_2^{(2)} = -2.444}$):

Menghitung nilai baru:

- $x_1^{(3)} = \frac{7-4(-2.444)}{3} = \frac{7+9.776}{3} = \frac{16.776}{3} \approx 5.592$
- $x_2^{(3)} = 4 - 2(5.592) = 4 - 11.184 = -7.184$

Hasil setelah 3 iterasi:

- $x_1 \approx 5.592$
- $x_2 \approx -7.184$

Kesimpulan:

Solusi yang diperoleh untuk sistem persamaan linear setelah **3 iterasi** menggunakan **Metode Seidel** adalah:

$$x_1 \approx 5.592, x_2 \approx -7.184$$

UJI KOMPETENSI

Carilah solusi sistem persamaan linear berikut menggunakan Metode Gauss Siedel!

1. Diberikan sistem persamaan linear berikut:

$$4x_1 + 2x_2 = 8$$
$$3x_1 - x_2 = 5$$

Gunakan Metode Seidel untuk menyelesaikan sistem ini dengan tebakan awal $x_1^{(0)} = 0$dan $x_2^{(0)} = 0$. Lakukan 3 iterasi.

2. Diberikan sistem persamaan linear berikut:

$$2x_1 - x_2 = 3$$
$$x_1 + 3x_2 = 7$$

Gunakan Metode Seidel untuk menyelesaikan sistem ini dengan tebakan awal $x_1^{(0)} = 1$dan $x_2^{(0)} = 1$. Lakukan 4 iterasi.

3. Diberikan sistem persamaan linear berikut:

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 5$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8$$
$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = 7$$

Gunakan Metode Seidel untuk menyelesaikan sistem ini dengan tebakan awal $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$, dan $x_3^{(0)} = 0$. Lakukan 3 iterasi.

4. Diberikan sistem persamaan linear berikut:

$$5x_1 - 2x_2 + x_3 = 9$$
$$3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 7$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

Gunakan Metode Seidel untuk menyelesaikan sistem ini dengan tebakan awal $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$, dan $x_3^{(0)} = 0$. Lakukan 4 iterasi.

5. Diberikan sistem persamaan linear berikut:

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 4$$
$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8$$

Gunakan Metode Seidel untuk menyelesaikan sistem ini dengan tebakan awal $x_1^{(0)} = 1$, $x_2^{(0)} = 1$, dan $x_3^{(0)} = 1$. Lakukan 3 iterasi.

Every moment is the precious moment so be aware and keep living in the present.
Keep going, keep trying and keep smilling.

- Frengky, 2012 -

BAB 11

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN NON LINER: METODE TABEL

Persamaan non-linier merupakan persamaan yang memiliki pangkat selain satu (misal: x^3) dan persamaan yang memiliki produk dua variabel (misal: xy). Akar dalam suatu penyelesaian persamaan non-linier $f(x) = 0$ merupakan nilai x yang menyebabkan nilai $f(x)$ sama dengan nol, dengan kata lain, akar-akar penyelesaian persamaan non-linier merupakan titik potong antara kurva $f(x)$ dengan sumbu x.

Contoh sederhana dari penentuan akar persamaan non-linier adalah penentuan akar persamaan kuadratik yang secara analitik dapat dilakukan menggunakan persamaan,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Untuk persamaan non-linier yang lebih kompleks tidak memungkinkan dilakukan menggunakan penyelesaian analitik, sehingga dapat digunakan metode numerik. Penyelesaian persamaan non-linier menggunakan **metode tabel**.

Definisi

Metode tabel dilakukan dengan membagi persamaan menjadi beberapa area, dimana untuk $x = [a, b]$ dibagi sebanyak N bagian dan pada massing-massing bagian dihitung nilai $f(x)$.

- Jika nilai $f(x_k) = 0$ atau $f(x_k)$ mendekati nol, dimana $a \leq k \leq b$, maka dikatakan bahwa x_k adalah penyelesaian persamaan $f(x)$.
- Jika tidak ditemukan, dicari nilai $f(x_k)$ dan $f(x_{k+1})$ yang berlawanan tanda. Jika tidak ditemukan, maka persamaan tersebut dapat dikatakan tidak mempunyai akar untuk rentang $[a, b]$.

Bila akar persamaan tidak ditemukan, maka ada dua kemungkinan untuk menentukan akar persamaan, yaitu:

a. Akar persamaan ditentukan oleh nilai mana yang lebih dekat. Bila $f(x_k) \leq f(x_{k+1})$, maka akarnya x_k. Bila $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$, maka akarnya x_{k+1}.
b. Perlu dicari lagi menggunakan rentang $x = [x_k, x_{k+1]}$.

ALGORITMA METODE TABEL

1. Definisikan fungsi $f(x)$
2. Tentukan range untuk x yang berupa batas bawah a dan batas atas b
3. Tentukan jumlah pembagian N
4. Hitung step pembagi
$$h = \frac{b-a}{N}$$
5. $x_i = a + i.h$Untuk $i = 0, \ldots, \mathrm{N}$, hitung
$$y_i = f(x_i)$$
6. Untuk $i = 0, \ldots, \mathrm{N}$, dimana
   - Bila $f(x_k) = 0$ maka x_k adalah penyelesaian
   - Bila $f(x_k).f(x_{k+1}) < 0$, maka:
     - Bila $|f(x_k)| < |f(x_{k+1})|$ maka x_k adalah penyelesaian
     - Bila tidak, x_{k+1} adalah penyelesaian atau dapat dikatakan penyelesaian berada diantara x_k dan x_{k+1}

Contoh :

Diberikan fungsi $f(x) = x^3 - 4x - 9$. Tentukan akar dari persamaan $f(x) = 0$pada interval $[2, 3]$dengan menggunakan **metode tabel** untuk menemukan akar persamaan tersebut.

Langkah-langkah:

1. Tentukan titik $x_0$dan $x_1$dalam interval yang diberikan, yaitu $[2, 3]$.
2. Hitung nilai $f(x)$pada x_0, x_1, dan seterusnya.
3. Periksa perubahan tanda pada kolom $f(x)$.
4. Lanjutkan dengan membuat tabel hingga menemukan akar yang dicapai dengan kesalahan yang dapat diterima.

Tabel Metode Tabel:

Iterasi	x_0	$f(x_0)$	x_1	$f(x_1)$	Titik Tengah x_2	$f(x_2)$
1	2.0	-9	3.0	6	2.5	-0.375
2	2.5	-0.375	3.0	6	2.75	2.859375
3	2.5	-0.375	2.75	2.859375	2.625	1.09375
4	2.5	-0.375	2.625	1.09375	2.5625	0.4384765625
5	2.5	-0.375	2.5625	0.4384765625	2.53125	0.0311279297
6	2.5	-0.375	2.53125	0.0311279297	2.515625	-0.1719055176

Penjelasan:

- Setiap iterasi mempersempit interval pencarian akar dengan menghitung titik tengah.
- Pada iterasi 5, tanda fungsi berubah antara $f(2.53125)$dan $f(2.5)$, yang menunjukkan akar berada di antara keduanya.
- Iterasi berlanjut hingga ditemukan akar dengan ketelitian yang diinginkan, sesuai dengan toleransi kesalahan ϵyang ditentukan.

UJI KOMPETENSI

1. Tentukan akar dari persamaan $f(x) = x^2 - 5$, pada interval $[2,3]$dengan menggunakan metode tabel.
2. Tentukan akar dari persamaan $f(x) = x^3 - 2x - 5$, pada interval $[1,3]$dengan menggunakan metode tabel.
3. Tentukan akar dari persamaan $f(x) = sin(x) - 0.5$, pada interval $[0,2]$dengan menggunakan metode tabel.
4. Tentukan akar dari persamaan $f(x) = x^3 - 3x + 1$, pada interval $[0,3]$dengan menggunakan metode tabel.
5. Tentukan akar dari persamaan $f(x) = x^2 + 3x - 2$, pada interval $[1,2]$dengan menggunakan metode tabel.

If you have the courage to start, you have the courage to succeed.
Either you run the day or the day runs you.

- Mel Robbins -

BAB 12

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN NON LINER: METODE BISEKSI

Persamaan non-linier merupakan persamaan yang memiliki pangkat selain satu (misal: x^3) dan persamaan yang memiliki produk dua variabel (misal: xy). Akar dalam suatu penyelesaian persamaan non-linier $f(x) = 0$ merupakan nilai x yang menyebabkan nilai $f(x)$ sama dengan nol, dengan kata lain, akar-akar penyelesaian persamaan non-linier merupakan titik potong antara kurva $f(x)$ dengan sumbu x.

Contoh sederhana dari penentuan akar persamaan non-linier adalah penentuan akar persamaan kuadratik yang secara analitik dapat dilakukan menggunakan persamaan,

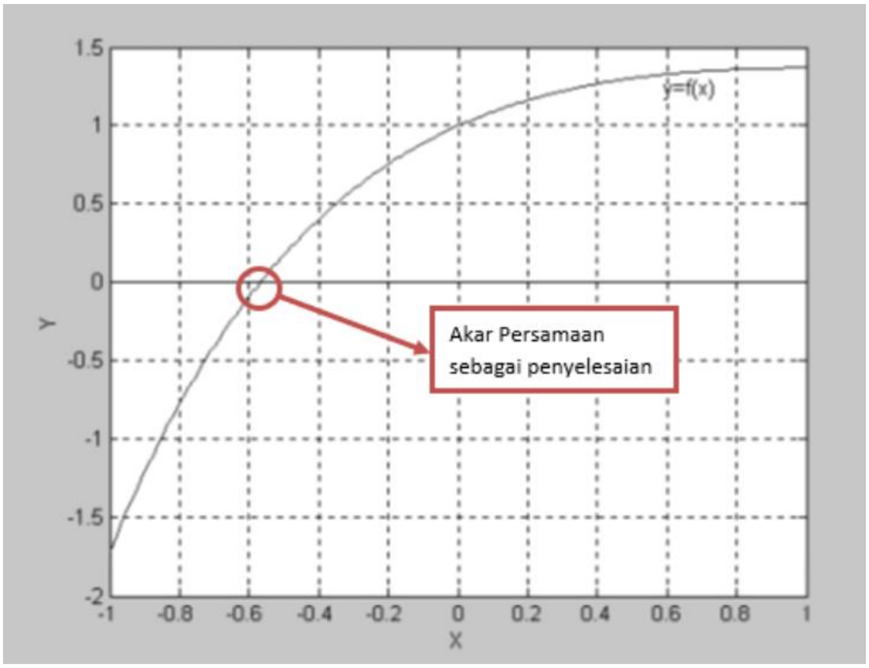
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Untuk persamaan non-linier yang lebih kompleks tidak memungkinkan dilakukan menggunakan penyelesaian analitik, sehingga dapat digunakan metode numerik.

Definisi

Prinsip metode biseksi adalah mengurung akar fungsi pada interval $x = [a, b]$ atau pada nilai x batas bawah a dan batas atas b. Selanjutnya interval tersebut terus menerus dibagi dua hingga sekecil mungkin, sehingga nilai hampiran yang dicari dapat ditentukan dengan tingkat toleransi tertentu.

Untuk lebih memahami metode biseksi, perhatikan visualisasi pada gambar berikut.



Gambar 15. Visualisasi Metode Biseksi

Sifat metode biseksi antara lain:

1. Konvergensi lambat
2. Caranya mudah
3. Tidak dapat digunakan untuk mencari akar imaginer
4. Hanya dapat mencari satu akar pada satu siklus.

ALGORITMA METODE BISEKSI

1. Definisikan fungsi $f(x)$
2. Tentukan rentang untuk x yang berupa batas bawah a dan batas atas b.
3. Tentukan nilai toleransi e dan iterasi maksimum N
4. Hitung $f(a)$ dan $f(b)$

5. Hitung:

$$x = \frac{a+b}{2}$$

6. Hitung $f(x)$
7. Bila $f(x).f(a) < 0$, maka $b = x$ dan $f(b) = f(x)$. Bila tidak, $a = x$ dan $f(a) = f(x)$.
8. Bila $|b - a < e$ atau iterasi maksimum maka proses dihentikan dan didapatkan akar x. Bila tidak, ulangi langkah 6.
9. Jika sudah diperoleh nilai dibawah nilai toleransi, nilai akar selanjutnya dihitung berdasarkan persamaan pada nomor 5 dengan nilai a dan b merupakan nilai baru yang diperoleh dari proses iterasi.

Kriteria Henti Metode Biseksi

Pencarian akar persamaan secara numerik tidak akan pernah menemukan harga eksak dengan kesalahan sama dengan nol. Hanya dapat melakukan pendekatan dengan tingkat ketelitian tertentu. Untuk menghindari pencarian akar terus-menerus tanpa henti, maka diperlukan suatu syarat agar proses tersebut dapat dihentikan. Syarat tersebut dinamakan ***harga toleransi***. Harga toleransi dapat diatur sesuai kebutuhan.

Contoh:

Diberikan fungsi $f(x) = x^3 - 4x - 9$. Tentukan akar dari persamaan $f(x) = 0$pada interval $[2,3]$dengan menggunakan metode biseksi, dengan toleransi kesalahan $\epsilon = 0.001$.

Penyelesaian:

Langkah 1: Tentukan nilai fungsi pada batas interval

- $f(2) = (2)^3 - 4(2) - 9 = 8 - 8 - 9 = -9$
- $f(3) = (3)^3 - 4(3) - 9 = 27 - 12 - 9 = 6$

Karena $f(2) < 0$dan $f(3) > 0$, maka ada akar di antara 2 dan 3 berdasarkan teorema nilai tengah.

Langkah 2: Tentukan titik tengah interval
Titik tengah $c$dihitung dengan rumus:

$$c = \frac{2+3}{2} = 2.5$$

Langkah 3: Evaluasi fungsi pada titik tengah

- $f(2.5) = (2.5)^3 - 4(2.5) - 9 = 15.625 - 10 - 9 = -3.375$

Langkah 4: Tentukan subinterval berikutnya
Karena $f(2) < 0$dan $f(2.5) < 0$, maka akar berada di interval $[2.5, 3]$.

Langkah 5: Ulangi langkah 2 hingga mencapai toleransi
Lakukan iterasi lebih lanjut dengan interval baru, menghitung titik tengah baru dan mengevaluasi fungsi pada titik tengah tersebut. Ulangi sampai perbedaan antara batas interval lebih kecil dari $\epsilon = 0.001$.

UJI KOMPETENSI

1. Diberikan fungsi $f(x) = x^2 - 4$. Tentukan akar dari persamaan $f(x) = 0$ pada interval $[1, 3]$dengan toleransi kesalahan $\epsilon = 0.001$.
2. Diberikan fungsi $f(x) = \ln(x) - 2$. Tentukan akar dari persamaan $f(x) = 0$pada interval $[1, 3]$dengan toleransi kesalahan $\epsilon = 0.001$.
3. Diberikan fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Tentukan akar dari persamaan $f(x) = 0$pada interval $[1, 2]$dengan toleransi kesalahan $\epsilon = 0.001$.
4. Diberikan fungsi $f(x) = x^3 - 4x + 1$. Tentukan akar dari persamaan $f(x) = 0$pada interval $[0, 2]$dengan toleransi kesalahan $\epsilon = 0.001$.
5. Diberikan fungsi $f(x) = e^x - 3x$. Tentukan akar dari persamaan $f(x) = 0$pada interval $[0, 1]$dengan toleransi kesalahan $\epsilon = 0.001$.

Keyakinan adalah langkah awal yang membawa kita ke cita-cita.
Tumbuhkan dan gali segala potensi sehingga keyakinan semakin kuta,
karena ini adalah alat dahsyat menuju cita-cita.

- Frengky, 2012 -

DAFTAR PUSTAKA

Morash, R. P. (1991). *Bridge to abstract mathematics: Mathematical Proof and Structures*. McGraw-Hill College.

Hammack, R. (2013). Book of Proof, 3rd.

Anton, H. (1987). Elementary Linear Algebra 9 th Edition.

Beecher, J. A. (2007). *Algebra and trigonometry*.

GLOSARIUM

Akar persamaan suatu	: penyelesaian atau pemecahan dari persamaan
Algoritma	: prosedur langkah demi langkah untuk menyelesaikan suatu masalah atau penghitungan
Bilangan real	: bilangan pada titik-titik garis bilangan yang panjangnya tak terhingga
Determinan matriks	: nilai yang dapat dihitung dari unsur suatu matriks persegi
Diagram	: gambaran (buram, sketsa) untuk memperlihatkan atau menerangkan sesuatu
Elemen	: bagian/anggota
Entri	: sinonim elemen
Fungsi	: aturan yang menghubungkan setiap anggota sebuah himpunan (dinamakan sebagai domain atau variabel bebas) kepada anggota himpunan yang lain (dinamakan sebagai kodomain atau variabel terikat)
Himpunan	: kumpulan objek yang terdefinisi dengan baik
Invers	: kebalikan

Iterasi	: suatu proses atau metode yang digunakan secara berulang- ulang (pengulangan) dalam menyelesaikan suatu permasalahan matematik
Koefisien	: bilangan pada bentuk aljabar yang memuat variabel
Konstanta	: bilangan pada bentuk aljabar yang tidak memuat variabel
Matriks baris	: matriks yang hanya terdiri dari satu baris
Matriks diagonal	: matriks persegi dimana semua elemen selain elemen diagonal utamanya adalah angka nol
Matriks identitas	: matriks diagonal dimana semua elemen pada diagonal utamanya adalah angka satu
Matriks kolom	: matriks yang hanya terdiri dari satu kolom
Matriks nol	: matriks yang semua entrinya merupakan bilangan nol
Matriks persegi	: matriks dengan n baris dan n kolom disebut sebagai matriks persegi berorde n
Matriks segitiga atas	: matriks persegi yang semua elemen di bawah diagonal utamanya adalah angka nol

Matriks segitiga bawah	: matriks persegi yang semua elemen di atas diagonal utamanya adalah angka nol
Matriks	: susunan bilangan berbentuk persegi panjang
Metode	: proses yang ditentukan untuk menyelesaikan tugas
Notasi	: seperangkat atau sistem lambang (tanda) yang menggambarkan bilangan (tentang aljabar)
Objek	: hal, perkara, atau orang yang menjadi pokok pembicaraan
Ordo matriks	: ukuran matriks
Pemetaan	: sinonim dari fungsi
Relasi	: hubungan
Simbol	: lambang
Sistem persamaan linier	: sekumpulan persamaan linear yang terdiri dari beberapa variabel
Skalar	: elemen dari suatu lapangan yang digunakan untuk mendefinisikan sebuah ruang vektor
Solusi	: penyelesaian
Subtitusi	: permisalan pada suatu variabel terhadap nilai atau ekspresi tertentu yang kemudian akan ditukarkan dengan variabel tersebut

Transpos matriks	: matriks yang diperoleh dengan menukarkan baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris
Variabel	: nilai yang dapat berubah *dalam* suatu cakupan soal atau himpunan operasi yang diberikan

INDEKS

BIODATA PENULIS

Deasy Sandhya Elya Ikawati, S.Si., M.Si. lahir di Malang 8 Desember 1990. Menyelesaikan Sarjana Sains di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2013 dan Magister Sains di Universitas Brawijaya pada tahun 2016. Menjadi dosen di Politeknik Negeri Malang dari tahun 2016 sampai sekarang.

DR. Eng. Cahya Rahmad, S.T., M.Kom., Lahir di Sumenep 2 Februari 1972, Mendapat gelar Sarjana Teknik dari Universitas Brawijaya 1998, gelar Magister Komputer dari ITS tahun 2005 dan gelar DR.Eng dari Saga University jepang tahun 2013. Menjadi dosen di Politeknik Negeri Malang dari tahun 2005 sampai sekarang.

Drs. Rawansyah, M.Pd., Lahir di Banjarmasin 20 Juni 1959, Mendapat gelar Sarjana Pendidikan Matematika dari Universitas Palangkaraya 1986, gelar Magister Pendidikan dari Universitas Negeri Malang tahun 2006. Menjadi dosen di Politeknik Negeri Malang dari tahun 1994 sampai sekarang.