

# MATEMATIKA TEKNIK

**Adi Candra Kusuma  
Kristina Widjajanti**



# Matematika Teknik

Copyrights © 2022. All Rights Reserved  
Hak cipta dilindungi undang-undang

Penulis:

**Adi Candra Kusuma**  
**Kristina Widjanti**

Penyunting:

**Dhega Febiharsa**

Desain & Tata Letak:

**Tim Penerbit Cerdas Ulet Kreatif**

ISBN :

Cetakan Pertama : **2022**

Penerbit :

**Cerdas Ulet Kreatif**

Jl. Manggis 72 RT 03 RW 04 Jember Lor - Patrang

Jember - Jawa Timur 68118

Telp. 0331-4431347, 412387 Faks. 4431347

e-mail : info@cerdas.co.id

Distributor Tunggal:

**Cerdas Ulet Kreatif**

Jl. Manggis 72 RT 03 RW 04 Jember Lor - Patrang

Jember - Jawa Timur 68118

Telp. 0331-4431347, 412387 Faks. 4431347

e-mail : info@cerdas.co.id

## **Undang-Undang RI Nomor 19 Tahun 2002**

### **Tentang Hak Cipta**

#### **Ketentuan Pidana**

#### **Pasal 72 (ayat 2)**

Barang Siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran Hak Cipta atau hak terkait sebagaimana dimaksud pada ayat (1), dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling

## KATA PENGANTAR

Syukur alhamdulillah senantiasa penulis panjatkan kehadiran Allah SWT, karena dengan rahmat dan hidayahnya penulis dapat menyelesaikan penulisan buku Matematika Teknik sebagai sarana belajar.

Buku ini berisikan materi yang esensial dari Matematika Teknik dan berisikan latihan soal untuk mendalami materi serta pemecahan masalah matematik pada kompetensi memahami konsep Matematika. Tujuan penulisan buku ini untuk membantu pembaca meningkatkan pemahaman matematika, diharapkan pula setelah melakukan latihan soal, pembaca akan lebih mahir dalam mengerjakan berbagai hal permasalahan mengenai masalah Matematika.

Penulis mengucapkan banyak terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu dan memotivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan buku Matematika Teknik ini. Penulis menyadari bahwa buku ini masih belum sempurna sehingga kritik saran sangat diharapkan untuk perbaikan penulisan kedepannya.

Malang. 14 Juni 2022

Penulis,

## DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	iii
DAFTAR ISI.....	iv
BAB 1 DERET TAYLOR & DERET MACLAURIN.....	1
<b>A. Deret Taylor dengan Fungsi Satu Variabel.....</b>	<b>2</b>
<b>B. Deret Taylor dengan Fungsi Dua Variabel.....</b>	<b>6</b>
BAB 2 INTEGRAL.....	9
<b>A. Integral Tak Tentu.....</b>	<b>9</b>
<b>B. Integral Tak tentu fungsi Aljabar.....</b>	<b>9</b>
<b>C. Integral Tak Tentu Untuk Fungsi Trigonometri.....</b>	<b>10</b>
<b>D. Integral Tak Tentu Fungsi Eksponen.....</b>	<b>11</b>
<b>E. Integral Tertentu Fungsi Aljabar.....</b>	<b>11</b>
<b>F. Integral Lipat.....</b>	<b>13</b>
<b>G. Penerapan Integral Tak Tentu.....</b>	<b>15</b>
<b>H. Metode Penyelesaian Integral.....</b>	<b>16</b>
<b>I. Integral Bentuk Rasional.....</b>	<b>20</b>
<b>J. Integral Bentuk akar (Khusus).....</b>	<b>26</b>
<b>K. Luasan daerah Kurva.....</b>	<b>27</b>
<b>L. Volume Kurva.....</b>	<b>30</b>
<b>M. Fungsi Hiperbolik.....</b>	<b>32</b>
UJI KOMPETENSI.....	36
BAB 3 PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDER 1.....	51
<b>A. Pengantar Persamaan Diferensial.....</b>	<b>51</b>
<b>B. Persamaan Diferensial Order 1.....</b>	<b>53</b>
<b>C. Persamaan Diferensial Homogen.....</b>	<b>56</b>
<b>D. Persamaan Diferensial Non Homogen.....</b>	<b>60</b>
<b>E. Persamaan Diferensial Eksak.....</b>	<b>66</b>

<b>F. Faktor Integrasi</b> .....	68
<b>G. Persamaan Diferensial Linear Order 1</b> .....	75
<b>H. Persamaan Diferensial Bernoulli</b> .....	78
<b>I. Persamaan Diferensial Riccati</b> .....	79
<b>BAB 4 PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDER 2</b> .....	83
<b>A. Pengantar Persamaan Diferensial Linear Order 2</b> .....	83
<b>B. Persamaan Diferensial Linear Homogen Order 2 dengan Koefisien Konstan</b> .....	83
<b>C. Persamaan Diferensial Linear Non Homogen Order 2</b> .....	86
<b>D. Penggunaan Variabel Komplek Pada PD Order 2</b> .....	91
<b>E. Metode Variasi Parameter</b> .....	93
<b>BAB 5 TRANSFORMASI LAPLACE</b> .....	97
<b>A. Pengantar Transformasi Laplace</b> .....	98
<b>B. Sifat Transformasi Laplace</b> .....	101
<b>C. Invers Transformasi Laplace</b> .....	107
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	113
<b>GLOSARIUM</b> .....	114
<b>INDEKS</b> .....	115
<b>BIOGRAFI</b> .....	117



## **BAB 1**

### **DERET TAYLOR & DERET MACLAURIN**

Deret Taylor merupakan representasi fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik. Deret ini dapat dianggap sebagai limit polinomial Taylor. Deret Taylor mendapat nama dari matematikawan Inggris Brook Taylor. Bila deret tersebut terpusat di titik nol, deret tersebut dinamakan sebagai deret Maclaurin, dari nama matematikawan Skotlandia Colin Maclaurin.

Persoalan-persoalan yang melibatkan model matematika banyak dijumpai dalam disiplin ilmu pengetahuan misalnya dalam bidang fisika, kimia, maupun ekonomi. Persoalan-persoalan tersebut biasanya dinyatakan dalam bentuk fungsi. Persoalan matematika tersebut tidak dapat diselesaikan dengan perhitungan analitik (eksak) sehingga perlu dilakukan perhitungan melalui hampiran atau aproksimasi untuk mendapatkan suatu nilai yang mendekati nilai eksaknya. Hal ini berarti bahwa dalam penyelesaian melalui aproksimasi terdapat suatu kesalahan (error) terhadap nilai eksaknya.

Dalam perhitungan dengan aproksimasi terdapat tiga macam kesalahan yang mungkin terjadi yaitu kesalahan bawaan, kesalahan pembulatan, dan kesalahan pemotongan. Kesalahan bawaan merupakan kesalahan dari nilai data yang mungkin terjadi karena kekeliruan dalam menyalin data atau membaca skala pengukuran. Kesalahan pembulatan terjadi karena tidak diperhitungkan beberapa angka terakhir dari suatu bilangan sedangkan kesalahan pemotongan merupakan kesalahan karena hanya mempergunakan beberapa suku pertama. Kesalahan pemotongan biasanya terjadi apabila suatu fungsi direpresentasikan kedalam bentuk deret pangkat tak hingga.

Pada umumnya hampiran terhadap suatu fungsi dilakukan berdasarkan penghampiran kedalam bentuk polinom. Hal ini karena polinom merupakan bentuk yang paling mudah dipahami, mudah dihitung dan hanya akan melibatkan pangkat-pangkat bilangan bulat sederhana. Salah satu bentuk polinom yang bisa digunakan untuk menghampiri suatu fungsi yaitu deret Taylor.

## A. Deret Taylor dengan Fungsi Satu Variabel

Deret Taylor untuk  $f(x)$  di sekitar  $x = a$  didefinisikan dengan

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots \quad (1)$$

Dimana  $a_n = \frac{f^n(a)}{n!}$  Dengan  $f^n(a)$  turunan ke-n dari  $f(x)$  di titik  $x = a$ .

Bila penderetan dilakukan di sekitar  $x = 0$ , maka disebut dengan **deret Maclaurin**, dan didefinisikan dengan

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \quad (2)$$

Dimana  $a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$  Dengan  $f^n(0)$  turunan ke-n dari  $f(x)$  di titik  $x = 0$ .

Contoh

Akan ditentukan bentuk deret fungsi berikut di titik yang diberikan

1.  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  disekitar  $x = 3$

Penyelesaian

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \rightarrow f(3) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \rightarrow f'(3) = -\frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \rightarrow f''(3) = \frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{-6}{(x-1)^4} \rightarrow f'''(3) = -\frac{3}{8}$$

Ingat  $\frac{1}{x-1}$

$$u = 1 \rightarrow u' = 0$$

$$v = x-1 \rightarrow v' = 1$$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{0(x-1) - 1(1)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

Ingat  $-\frac{1}{(x-1)^2}$

$$u = -1 \rightarrow u' = 0$$

$$v = (x-1)^2 \rightarrow v' = 2(x-1)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{0(x-1)^2 - (-1)2(x-1)}{((x-1)^2)^2} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{2}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Ingat  $\frac{2}{(x-1)^3}$

$$u = 2 \rightarrow u' = 0$$

$$v = (x-1)^3 \rightarrow v' = 3(x-1)^2$$

$$f'''(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{0(x-1)^3 - (2)3(x-1)^2}{((x-1)^3)^2} = \frac{-6(x-1)^2}{(x-1)^6}$$

$$= -\frac{6}{(x-1)^4}$$

Dimana

$$a_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

$$a_1 = \frac{f^1(3)}{1!} = -\frac{1}{4}$$

$$a_2 = \frac{f^2(3)}{2!} = \frac{1}{4 \cdot 2!} = \frac{1}{8}$$

$$a_3 = \frac{f^3(3)}{3!} = \frac{-3}{8 \cdot 3!} = -\frac{1}{16}$$

Sehingga bentuk deretnya

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-3) + \frac{1}{8}(x-3)^2 - \frac{1}{16}(x-a)^3 + \dots$$

2.  $f(x) = e^{2x}$  disekitar  $x = 4$

Penyelesaian

$$f(x) = e^{2x} \rightarrow f(4) = e^8 = e$$

$$f'(x) = 2e^{2x} \rightarrow f'(4) = 2e^8 = 2e = e$$

$$f''(x) = 4e^{2x} \rightarrow f''(4) = 4e^8 = 4e = e$$

$$f'''(x) = 8e^{2x} \rightarrow f'''(4) = 8e^8 = 8e = e$$

$$a_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

$$a_1 = \frac{f^1(4)}{1!} = 2e = e$$

$$a_2 = \frac{f^2(4)}{2!} = \frac{4e}{2!} = 2e = e$$

$$a_3 = \frac{f^3(4)}{3!} = \frac{8e}{3!} = \frac{4}{3}e = e$$

Sehingga bentuk deretnya

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots$$

$$e^{2x} = e + e(x-4) + e(x-4)^2 + e(x-4)^3 + \dots$$

3.  $f(x) = \sin x$  disekitar  $x = 0$

Penyelesaian

$$f(x) = \sin x \rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \rightarrow f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x \rightarrow f^{(5)}(0) = 1$$

$$f^{(6)}(x) = -\sin x \rightarrow f^{(6)}(0) = 0$$

$$f^{(7)}(x) = -\cos x \rightarrow f^{(7)}(0) = -1$$

Pola ini akan berulang sampai suku tak hingga. Sehingga, terbentuk deret Maclaurin untuk  $f(x) = \sin x$  adalah

$$a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$$

$$a_1 = \frac{f^1(0)}{1!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_2 = \frac{f^2(0)}{2!} = \frac{0}{2!} = 0$$

$$a_3 = \frac{f^3(0)}{3!} = \frac{-1}{3!}$$

$$a_4 = \frac{f^4(0)}{4!} = \frac{0}{4!} = 0$$

$$a_5 = \frac{f^5(0)}{5!} = \frac{1}{5!}$$

$$a_6 = \frac{f^6(0)}{6!} = \frac{0}{6!} = 0$$

$$a_7 = \frac{f^7(0)}{7!} = \frac{-1}{7!}$$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$\sin x = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + 0 \cdot x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + 0 \cdot x^6 + \frac{-1}{7!}x^7 + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

4.  $f(x) = \cos x$  disekitar  $x = \frac{\pi}{3}$

Penyelesaian

Karena  $f(x) = \cos x = \frac{d(\sin x)}{dx}$

$$\cos x = \frac{d}{dx} \left( x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{3!}3x^2 + \frac{1}{5!}5x^4 - \frac{1}{7!}7x^6 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

Kemudian

$$\cos x = \cos \left( x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left[ \left( x - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3} \right]$$

$$= \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right) \cos \frac{\pi}{3} - \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right) \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right) \frac{1}{2} - \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right) \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)$$

Dari persamaan diatas maka

$$\begin{aligned}\cos x = \frac{1}{2} & \left[ 1 - \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 - \frac{1}{6!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^6 + \dots \right] \\ & - \frac{1}{2} \sqrt{3} \left[ \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5 \right. \\ & \left. - \frac{1}{7!} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^7 + \dots \right]\end{aligned}$$

Ingat

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Latihan

Selesaikan bentuk fungsi berikut

1.  $f(x) = \ln x$  disekitar  $x = 1$
2.  $f(x) = e^{3x}$  disekitar  $x = 0$

## B. Deret Taylor dengan Fungsi Dua Variabel

Deret Taylor untuk  $f(x, y)$  di sekitar  $(x, y) = (a, b)$  didefinisikan dengan

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + f_x(x, y)(x - a) + f_y(x, y)(y - b) \\ &+ \frac{1}{2!} [f_{xx}(x, y)(x - a)^2 + 2f_{xy}(x, y)(x - a)(y - b) \\ &+ f_{yy}(x, y)(y - b)^2] + \frac{1}{3!} [f_{xxx}(x, y)(x - a)^3 \\ &+ 3f_{xxy}(x, y)(x - a)^2(y - b) \\ &+ 3f_{xyy}(x, y)(x - a)(y - b)^2 + f_{yyy}(x, y)(y - b)^3] + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Contoh

Tentukan deret dari fungsi  $f(x, y) = y \cos(x + y)$  di sekitaran titik  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$

Penyelesaian

$$f(x, y) = y \cos(x + y)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{6}\sqrt{3}$$

Perhatikan

$$f_x(x, y) = -y \sin(x + y) \leftrightarrow f_x\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$f_y(x, y) = \cos(x + y) - y \sin(x + y)$$

$$\rightarrow f_y\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= -y \cos(x + y) \leftrightarrow f_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{3} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \\ &= \frac{\pi}{6}\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yy}(x, y) &= -\sin(x + y) - \sin(x + y) - y \cos(x + y) \leftrightarrow f_{yy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -2 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2 \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \\ &= -1 + \frac{\pi}{6}\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xy}(x, y) &= -\sin(x + y) - y \cos(x + y) \leftrightarrow f_{xy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
y \cos(x + y) &= f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) + f_x\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f_y\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)\left(y - \frac{\pi}{3}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2!} \left[ f_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + 2f_{xy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\left(y - \frac{\pi}{3}\right) \right. \\
&\quad \left. + f_{yy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)\left(y - \frac{\pi}{3}\right)^2 \right] \\
y \cos(x + y) &= -\frac{\pi}{6}\sqrt{3} + -\frac{\pi}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right)\left(y - \frac{\pi}{3}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{6}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}\sqrt{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\left(y - \frac{\pi}{3}\right) + \left(-1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\pi}{6}\sqrt{3}\right)\left(y - \frac{\pi}{3}\right)^2 \right]
\end{aligned}$$

### Latihan

1. Tentukan deret dari fungsi  $f(x, y) = x^2 \sin xy^2$  disekitaran titik (1,2)
2. Tentukan deret dari fungsi  $f(x, y) = 2e^{3y} \cos \frac{\pi}{6}x$  disekitaran titik (1,2)



## BAB 2 INTEGRAL

### A. Integral Tak Tentu

Menentukan fungsi  $f(x)$  dari  $f'(x)$ , berarti menentukan antiturunan dari  $f'(x)$ . Sehingga, integral merupakan antiturunan (antidiferensial) atau operasi invers terhadap diferensial. Jika  $f(x)$  adalah fungsi umum yang bersifat  $f'(x) = f(x)$ , maka  $f(x)$  merupakan antiturunan atau integral dari  $f'(x) = f(x)$ .

Pengintegralan fungsi  $f(x)$  yang ditulis sebagai  $\int f(x) dx$  disebut integral tak tentu dari  $f(x)$ . Jika  $F(x)$  anti turunan dari  $f(x)$ , maka

$$\int F(x) dx = f(x) + c \quad (1)$$

Keterangan:

$\int$  = notasi integral (yang diperkenalkan oleh Leibniz, seorang matematikawan Jerman)

$f(x)$  = fungsi integran

$F(x)$  = fungsi integral umum yang bersifat  $f'(x) = F(x)$

$c$  = konstanta pengintegralan

### B. Integral Tak tentu fungsi Aljabar

Bentuk umum

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad (2)$$

Sifat Integral

1.  $\int dx = x + c$
2.  $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$
3.  $\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Contoh

Tentukan integral dari

1.  $\int x^3 dx = \frac{1}{3+1} x^{3+1} + C = \frac{1}{4} x^4 + C$
2.  $\int 2\sqrt{x^3} dx = \int 2x^{\frac{3}{2}} dx = 2 \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$
3.  $\int 5x^5 - 7x^2 + x - 9 dx$   
 $= \frac{5}{5+1} x^{5+1} - \frac{7}{2+1} x^{2+1} + \frac{1}{1+1} x^{1+1} - \frac{9}{0+1} x^{0+1} + C$   
 $= \frac{5}{6} x^6 - \frac{7}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 9x^1 + C$

### C. Integral Tak Tentu Untuk Fungsi Trigonometri

Sifat Integral

1.  $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
2.  $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
3.  $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$
4.  $\int \tan x \sec x \, dx = \sec x + c$
5.  $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cotan x + c$
6.  $\int \cotan x \operatorname{cosec} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$
7.  $\int \cos(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$
8.  $\int \sin(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$
9.  $\int \sec^2(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + c$
10.  $\int \tan(ax + b) \sec(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sec(ax + b) + c$
11.  $\int \operatorname{cosec}^2(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cotan(ax + b) + c$
12.  $\int \cotan(ax + b) \operatorname{cosec} x(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \operatorname{cosec}(ax + b) + c$

Contoh

Tentukan integral dari

1.  $\int 5 \cos x + 3 \, dx = 5 \sin x + 3x + C$
2.  $\int \sin^2 x \, dx = \int \sin x \sin x \, dx$ 
$$= \int \frac{1}{2} \{ \cos(x - x) - \cos(x + x) \} dx$$
$$= \int \frac{1}{2} \{ 1 - \cos 2x \} dx$$
$$= \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \, dx$$
$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + C$$
$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$
3.  $\int \sec^2 2x - 5 \, dx = \frac{1}{2} \tan 2x - 5x + C$
4.  $\int (\sin x + \cos x)^2 \, dx = \int (\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x) \, dx$ 
$$= \int \{ \sin^2 x + \sin x \cos x$$
$$+ \sin x \cos x + \cos^2 x \} dx$$
$$= \int \{ \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \{1 + 2 \sin x \cos x\} dx \\
&= \int \{1 + \sin 2x\} dx \\
&= x - \frac{1}{2} \cos 2x + C
\end{aligned}$$

#### D. Integral Tak Tentu Fungsi Eksponen

Karena  $\frac{de^x}{dx} = e^x$  dan  $\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a$  sehingga

$$\begin{aligned}
\int e^x dx &= e^x + C \\
\int e^{u(x)} dx &= \frac{1}{u'(x)} e^{u(x)} + C \\
\int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \\
\int \frac{1}{x} dx &= \ln x + C \\
\int e^{\ln x} dx &= \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C
\end{aligned}$$

Contoh

- $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + c$
- $\int 9 e^x dx = 9 e^x + c$
- $\int 2 e^{5x-3} dx = \frac{2}{5} e^{5x-3} + c$
- $\int \left( \frac{2}{5} e^{3x} - \frac{1}{3} 2^x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{2}{5} \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{3 \ln 2} 2^x + \ln x + c$   
 $= \frac{2}{15} e^{3x} - \frac{2^x}{3 \ln 2} + \ln x + c$
- $\int e^{\ln x^2} dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$

#### E. Integral Tertentu Fungsi Aljabar

Jika fungsi  $y = f(x)$  kontinu pada interval  $a \leq x \leq b$ , maka:

$$\int_a^b f(x) dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a) \quad (3)$$

Sifat Integral

1.  $\int_a^a f(x) dx = 0$
2.  $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$  dengan  $k = \text{konstanta}$
3.  $\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

$$4. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$5. \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Contoh

Hitunglah integral dari

$$1. \int_1^3 3x^2 dx = x^3 \Big|_1^3 = 3^3 - 1^3 = 27 - 1 = 26$$

$$\begin{aligned}
 2. \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} [3 \cos x + 5 \sin x] dx &= 3 \sin x - 5 \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \left[ 3 \sin \frac{\pi}{2} - 5 \cos \frac{\pi}{2} \right] - \left[ 3 \sin -\frac{\pi}{3} - 5 \cos -\frac{\pi}{3} \right] \\
 &= [3 \sin 90^\circ - 5 \cos 90^\circ] - [-3 \sin 60^\circ - 5 \cos 60^\circ] \\
 &= [3(1) - 5 \cdot (0)] - \left[ -3 \left( \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) - 5 \left( \frac{1}{2} \right) \right] \\
 &= 3 + \frac{3}{2} \sqrt{3} + \frac{5}{2} \\
 &= \frac{6}{2} + \frac{3}{2} \sqrt{3} + \frac{5}{2} = \frac{11}{2} + \frac{3}{2} \sqrt{3} = \frac{11 + 3\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

$$3. \text{ Jika } \int_1^k (2x - 5) dx = 18 \text{ untuk } k > 0 \text{ maka } k^2 + 3 \text{ adalah}$$

Jawab

$$\int_1^k (2x - 5) dx = 18$$

$$x^2 - 5x \Big|_1^k = 18$$

$$[k^2 - 5k] - [1^2 - 5(1)] = 18$$

$$k^2 - 5k - 1 + 5 = 18$$

$$k^2 - 5k + 4 - 18 = 0$$

$$k^2 - 5k - 14 = 0$$

$$(k - 7)(k + 2) = 0$$

$$(k - 7) = 0 \text{ atau } (k + 2) = 0$$

$$k = 7 \text{ atau } k = -2$$

Karena  $k > 0$  maka yang memenuhi  $k = 7$  jadi

$$k^2 + 3 = 7^2 + 3 = 49 + 3 = 52$$

$$\begin{aligned}
4. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos x \, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{2} (\cos(x+x) + \cos(x-x)) \right] dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{2} (\cos 2x + 1) \right] dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \right] dx \\
&= \left[ \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left[ \frac{1}{4} \sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right) \right] - \left[ \frac{1}{4} \sin 2(0) + \frac{1}{2}(0) \right] \\
&= \left[ \frac{1}{4} \sin \pi + \frac{\pi}{4} \right] - 0 \\
&= \left( 0 + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

## F. Integral Lipat

### a. Integral Lipat Dua

Rumus

$$A = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) \, dx \, dy \quad (4)$$

Langkah penyelesaian:

- 1)  $f(x, y)$  diintegrasikan terhadap  $x$  (dengan menganggap  $y$  konstan) dengan batas  $x = x_1$  dan  $x = x_2$ .
- 2) Hasilnya kemudian diintegrasikan terhadap  $y$  dengan batas  $y = y_1$  dan  $y = y_2$ .

Tentukan  $A = \int_1^2 \int_2^4 (x + 2y) \, dx \, dy$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^2 \int_2^4 (x + 2y) \, dx \, dy = \int_1^2 \left[ \frac{1}{2} x^2 + 2xy \right]_2^4 dy \\
&= \int_1^2 \left\{ \frac{1}{2} 4^2 + 2(4)y \right\} - \left\{ \frac{1}{2} 2^2 + 2(2)y \right\} dy \\
&= \int_1^2 \{ 8 + 8y \} - \{ 2 + 4y \} dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^2 (6 + 4y) dy \\
&= 6y + 2y^2 \Big|_1^2 \\
&= [6(2) + 2(2)^2] - [6(1) + 2(1)^2] \\
&= [12 + 8] - [6 + 2] \\
&= 20 - 8 \\
&= 12
\end{aligned}$$

## b. Integral Lipat Tiga

Rumus

$$A = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z) dx dy dz \quad (5)$$

Langkah penyelesaian:

- 1)  $f(x, y, z)$  diintegrasikan terhadap  $x$  (dengan menganggap  $y$  dan  $z$  konstan) dengan batas  $x = x_1$  dan  $x = x_2$ .
- 2) Hasilnya kemudian diintegrasikan terhadap  $y$  dengan batas  $y = y_1$  dan  $y = y_2$  (dengan menganggap  $z$  konstan)
- 3) Hasilnya kemudian diintegrasikan terhadap  $z$  dengan batas  $z = z_1$  dan  $z = z_2$

Contoh

Tentukan nilai dari  $A = \int_1^3 \int_{-1}^1 \int_0^2 (x + 2y - z) dx dy dz$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^3 \int_{-1}^1 \int_0^2 (x + 2y - z) dx dy dz \\
&= \int_1^3 \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2} x^2 + 2xy - xz \right]_0^2 dy dz \\
&= \int_1^3 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{2} 2^2 + 2(2)y - 2z \right\} - \left\{ \frac{1}{2} 0^2 + 2(0)y - 2(0) \right\} dy dz \\
&= \int_1^3 \int_{-1}^1 \{2 + 4y - 2z\} dy dz \\
&= \int_1^3 [2y + 2y^2 - 2yz]_{-1}^1 dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^3 [2(1) + 2(1)^2 - 2(1)z] - [2(-1) + 2(-1)^2 - 2(-1)z] dz \\
&= \int_1^3 [4 - 2z] - [2z] dz \\
&= \int_1^3 [4 - 4z] dz = 4z - 2z^2 \Big|_1^3 \\
&= [4(3) - 2(3)^2] - [4(1) - 2(1)^2] \\
&= [12 - 18] - [4 - 2] \\
&= -6 - 2 = -8
\end{aligned}$$

### G. Penerapan Integral Tak Tentu

Integral tak tentu dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan berikut

a) Menentukan suatu fungsi jika turunan dari fungsinya diberikan.

Contoh

Diketahui  $f'(x) = 9x^2 - 6x + 7$  dan  $f(-1) = 4$ . Tentukan  $f(x)$ .

Jawab:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (9x^2 - 6x + 7) dx = 3x^3 - 3x^2 + 7x + C$$

Karena  $f(-1) = 4$

$$3(-1)^3 - 3(-1)^2 + 7(-1) + C = 4$$

$$-3 - 3 - 7 + C = 4$$

$$-13 + C = 4$$

$$C = 4 + 13 = 17$$

Jadi

$$f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 7x + 17$$

b) Untuk menentukan posisi, kecepatan, dan percepatan suatu benda pada waktu tertentu.

Misalnya  $s$  menyatakan posisi benda, kecepatan benda dinyatakan dengan  $v$ , dan percepatan benda dinyatakan dengan  $a$ . Hubungan antara  $s$ ,  $v$ , dan  $a$  adalah sebagai berikut.

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ sehingga } s = \int v dt \quad (6)$$

$$a = \frac{dv}{dt} \text{ sehingga } v = \int a dt \quad (7)$$

Contoh

Sebuah benda bergerak pada garis lurus dengan percepatan  $a$  yang memenuhi persamaan  $a = 2t - 1$ ,  $a$  dalam  $m/s^2$  dan  $t$  dalam detik.

Jika kecepatan awal benda  $v = 5 \text{ m/s}$  dan posisi benda saat  $t = 6$  adalah  $s = 92 \text{ m}$ , maka tentukan persamaan posisi benda tersebut saat  $t$  detik!

Jawab:

$$a = 2t - 1$$

$$v(t) = \int a \, dt = \int (2t - 1) \, dt = t^2 - t + C$$

Kecepatan awal benda  $5 \text{ m/s}$ , artinya saat  $t = 0$  nilai  $v = 5 \leftrightarrow v(0) = 5$

$$v(t) = t^2 - t + C$$

$$v(0) = 0^2 - 0 + C$$

$$5 = C$$

Sehingga  $v(t) = t^2 - t + 5$  maka

$$s(t) = \int v \, dt = \int (t^2 - t + 5) \, dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 5t + C$$

Posisi benda saat  $t = 6$  adalah  $s = 92 \text{ m} \leftrightarrow s(6) = 92$

$$s(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 5t + C$$

$$s(6) = \frac{1}{3}6^3 - \frac{1}{2}6^2 + 5 \cdot 6 + C$$

$$92 = 72 - 18 + 30 + C$$

$$92 = 84 + C$$

$$C = 92 - 84 = 8$$

$$\text{Maka } s(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 5t + 8$$

## H. Metode Penyelesaian Integral

### 1. Metode Substitusi

Konsep dasar dari metode ini adalah dengan mengubah integral yang kompleks menjadi bentuk yang lebih sederhana. Dengan cara mensubstitusikan/ mengganti.

$$\int \left[ f(u) \frac{du}{dx} \right] dx = \int f(u) du \quad (8)$$

Contoh

- $\int (5x - 3)^9 dx?$

Misalkan  $u = 5x - 3 \leftrightarrow \frac{du}{dx} = 5 \leftrightarrow \frac{1}{5} du = dx$

$$\begin{aligned} \int (5x - 3)^9 dx &= \int u^9 \frac{1}{5} du = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} u^{10} + c = \frac{1}{50} u^{10} + c \\ &= \frac{1}{50} (5x - 3)^{10} + c \end{aligned}$$

- $\int 2x(x^2 + 7)^{11} dx?$

Misalkan  $u = x^2 + 7 \leftrightarrow \frac{du}{dx} = 2x \leftrightarrow du = 2x \, dx$

$$\int 2x(x^2 + 7)^{11} dx = \int (x^2 + 7)^{11} 2x dx = \int u^{11} du = \frac{1}{12} u^{12} \\ = \frac{1}{12} (x^2 + 7)^{12} + c$$

- $\int (x - 5)(x^2 - 10x + 5)^7 dx?$

Misalkan

$$u = x^2 - 10x + 5 \leftrightarrow \frac{du}{dx} = 2x - 10 \leftrightarrow \frac{du}{dx} = 2(x - 5) \leftrightarrow \frac{1}{2} du \\ = (x - 5) dx$$

$$\int (x - 5)(x^2 - 10x + 5)^7 dx? = \int \frac{1}{2} u^7 du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} u^8 + c \\ = \frac{1}{16} (x^2 - 10x + 5)^8 + c$$

- $\int (x^2 - 1)(x + 3)^5 dx?$

Misalkan  $u = x + 3 \leftrightarrow \frac{du}{dx} = 1 \leftrightarrow du = dx$

$$x = u - 3$$

$$\int (x^2 - 1)(x + 3)^5 dx = \int [(u - 3)^2 - 1] u^5 du$$

$$= \int [(u - 3)(u - 3) - 1] u^5 du$$

$$= \int [u^2 - 3u - 3u + 9 - 1] u^5 du$$

$$= \int [u^2 - 6u + 8] u^5 du$$

$$= \int [u^7 - 6u^6 + 8u^5] du$$

$$= \frac{1}{8} u^8 - \frac{6}{7} u^7 + \frac{8}{6} u^6 + c$$

$$= \frac{1}{8} (x + 3)^8 - \frac{6}{7} (x + 3)^7 + \frac{4}{3} (x + 3)^6 + c$$

- $\int 9 e^{3x} dx?$

Misalkan  $u = 3x \leftrightarrow \frac{du}{dx} = 3 \leftrightarrow \frac{1}{3} du = dx$

$$\int 9 e^{3x} dx = \int 9 e^u \frac{1}{3} du = 3 \int e^u du = 3e^u + c = 3e^{3x} + c$$

- $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx?$

Misalkan  $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \leftrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leftrightarrow 2\sqrt{x} du = dx \leftrightarrow 2u du = dx$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{e^u}{u} 2u du = 2 \int e^u du = 2 e^u + c = e^{\sqrt{x}} + c$$

- $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1} dx?$

Misalkan  $u = e^{3x} + 1 \leftrightarrow \frac{du}{dx} = 3e^{3x} \leftrightarrow \frac{1}{3} du = e^{3x} dx$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1} dx = \int \frac{\frac{1}{3} du}{u} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{3} \ln u + c = \frac{1}{3} \ln (e^{3x} + 1) + c$$

- $\int e^x (e^x + 1)^{\frac{1}{5}} dx?$

Misalkan  $u = e^x + 1 \leftrightarrow \frac{du}{dx} = e^x \leftrightarrow du = e^x dx$

$$\int e^x (e^x + 1)^{\frac{1}{5}} dx = \int u^{\frac{1}{5}} du = \frac{5}{6} u^{\frac{6}{5}} + c = \frac{5}{6} (e^x + 1)^{\frac{6}{5}} + C$$

## 2. Metode Parsial

Apabila menemukan bentuk integral yang tidak bisa diselesaikan dengan integral substitusi, mungkin permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan substitusi ganda yang lebih dikenal sebagai integral parsial.

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du \quad (9)$$

Contoh

- $\int x^2 \sin x dx?$

Misalkan

$$u = x^2 \leftrightarrow \frac{du}{dx} = 2x \leftrightarrow du = 2x dx$$

$$dv = \sin x dx \leftrightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

$$\int x^2 \sin x dx = x^2 (-\cos x) - \int -\cos x (2x) dx$$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + c$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c$$

Jadi  $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c$

Perhatikan

Dimana  $\int x \cos x dx$

Misalkan  $u = x \leftrightarrow \frac{du}{dx} = 1 \leftrightarrow du = dx$

$$dv = \cos x \, dx \leftrightarrow v = \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x$$

Atau cara lain  $\int x^2 \sin x \, dx$ ?

TURUNKAN		INTEGRALKAN
$x^2$	+	$\sin x$
$2x$	-	$-\cos x$
$2$	+	$-\sin x$
$0$		$\cos x$

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x \, dx &= \oplus x^2 (-\cos x) \ominus 2x (-\sin x) \oplus 2 \cos x + c \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c \end{aligned}$$

•  $\int 2x e^x \, dx$ ?

Misalkan  $u = 2x \leftrightarrow \frac{du}{dx} = 2 \leftrightarrow du = 2 \, dx$

$$dv = e^x \, dx \leftrightarrow v = \int e^x \, dx = e^x$$

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

$$\begin{aligned} \int 2x e^x \, dx &= 2x e^x - \int e^x 2 \, dx \\ &= 2x e^x - 2 \int e^x \, dx \\ &= 2x e^x - 2e^x + c \\ &= 2e^x(x - 1) + c \end{aligned}$$

Jadi  $\int 2x e^x \, dx = 2e^x(x - 1) + c$

Atau dengan cara lain  $\int 2x e^x \, dx$ ?

TURUNKAN		INTEGRALKAN
$2x$	+	$e^x$
$2$	-	$e^x$
$0$		$e^x$

$$\int 2x e^x \, dx = \oplus 2x e^x \ominus 2e^x + c = 2e^x(x - 1) + c$$

## I. Integral Bentuk Rasional

Jika terdapat bentuk integral Rasional  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  dimana  $p(x)$  dan  $q(x)$  merupakan suku banyak.

- Jika pangkat  $p(x) > q(x)$  maka penyelesaiannya  $f(x) = R(x) + \frac{h(x)}{q(x)}$ .  
Dimana  $R(x)$  merupakan hasil bagi  $p(x)$  oleh  $q(x)$  dan  $\frac{h(x)}{q(x)}$  merupakan sisa pembagian.

Contoh

Tentukan nilai  $\int \frac{7x^3 - 3x + 1}{x^2 + 3} dx$

Penyelesaian

$$\begin{array}{r} x^2 + 3 \overline{) 7x^3 - 3x + 1} \\ \underline{7x^3 + 21x} \quad (-) \\ -24x + 1 \end{array}$$

Karena  $f(x) = R(x) + \frac{h(x)}{q(x)}$

$$\begin{aligned} \int \frac{7x^3 - 3x + 1}{x^2 + 3} dx &= \int 7x dx + \int \frac{-24x + 1}{x^2 + 3} dx \\ &= \frac{7}{2}x^2 + \int \frac{-24x}{x^2 + 3} dx + \int \frac{1}{x^2 + 3} dx \\ &= \frac{7}{2}x^2 - 12 \ln(x^2 + 3) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

Perhatikan

Misalkan  $u = x^2 + 3 \leftrightarrow \frac{du}{dx} = 2x \leftrightarrow \frac{1}{2} du = dx$

$$\int \frac{-24x}{x^2 + 3} dx = -24 \int \frac{\frac{1}{2} du}{u} = -12 \int \frac{1}{u} du = -12 \ln(x^2 + 3)$$

Ingat

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx &= \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \\ \int \frac{1}{(x^2 + 3)} dx &= \int \frac{1}{(\sqrt{3})^2 + x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

- Jika pangkat  $p(x) < q(x)$ . Setiap suku banyak dengan koefisien real dapat dinyatakan sebagai perkalian dari faktor-faktor linear dan kuadrat sedemikian sehingga tiap-tiap faktor mempunyai koefisien real. Ada 4 kasus dari pemfaktoran penyebut

**1. Faktor linear dan tidak berulang.**

Misalkan  $q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\dots(a_nx + b_n)$

Maka  $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \dots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$  dengan  $A_1, A_2, \dots, A_n$  merupakan konstanta.

Contoh

$$\int \frac{1}{16x^2 - 9} dx$$

Penyelesaian

$$\frac{1}{16x^2 - 9} = \frac{1}{(4x + 3)(4x - 3)} = \frac{A}{4x + 3} + \frac{B}{4x - 3}$$

$$1 = A(4x - 3) + B(4x + 3)$$

$$1 = 4Ax - 3A + 4Bx + 3B$$

$$1 = (4A + 4B)x + (-3A + 3B)$$

Diperoleh persamaan

$$4A + 4B = 0 \leftrightarrow 4A = -4B \leftrightarrow A = -B$$

$$-3A + 3B = 1 \leftrightarrow -3(-B) + 3B = 1 \leftrightarrow 6B = 1 \leftrightarrow B = \frac{1}{6}$$

$$\text{Jadi } A = -B = -\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{16x^2 - 9} = \frac{A}{4x + 3} + \frac{B}{4x - 3}$$

$$\int \frac{1}{16x^2 - 9} dx = \int \frac{A}{4x + 3} dx + \int \frac{B}{4x - 3} dx$$

$$\int \frac{1}{16x^2 - 9} dx = \int \frac{-\frac{1}{6}}{4x + 3} dx + \int \frac{\frac{1}{6}}{4x - 3} dx$$

$$= -\frac{1}{24} \ln(4x + 3) + \frac{1}{24} \ln(4x - 3) + C$$

Perhatikan

$$\int \frac{1}{(ax + b)} dx = \frac{1}{a} \ln(ax + b)$$

$$\int \frac{-\frac{1}{6}}{4x + 3} dx = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \ln(4x + 3) = -\frac{1}{24} \ln(4x + 3)$$

$$\int \frac{1}{4x-3} dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \ln(4x-3) = \frac{1}{24} \ln(4x-3)$$

## 2. Faktor linear dan berulang.

Misalkan  $q(x) = (a_i x + b_i)^n$  dengan  $n \in B^+$

Maka  $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(a_i x + b_i)^n} + \frac{A_2}{(a_i x + b_i)^{n-1}} + \dots + \frac{A_n}{(a_i x + b_i)}$  dengan

$A_1, A_2, \dots, A_n$  merupakan konstanta.

Contoh

$$\int \frac{3}{(x+2)^2(x-1)} dx$$

Penyelesaian

$$\frac{3}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A}{(x+2)^2} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x-1)}$$

$$3 = A(x-1) + B(x+2)(x-1) + C(x+2)^2$$

$$3 = A(x-1) + B(x^2 + x - 2) + C(x^2 + 4x + 4)$$

$$3 = Ax - A + Bx^2 + Bx - 2B + Cx^2 + 4Cx + 4C$$

$$3 = (B+C)x^2 + (A+B+4C)x + (-A-2B+4C)$$

Diperoleh persamaan

$$B + C = 0 \leftrightarrow B = -C$$

$$A + B + 4C = 0 \leftrightarrow A - C + 4C = 0 \leftrightarrow A + 3C = 0$$

$$-A - 2B + 4C = 3 \leftrightarrow -A - 2(-C) + 4C = 3 \leftrightarrow -A + 6C = 3$$

Dengan menggunakan eliminasi

$$A + 3C = 0$$

$$A + 3C = 0$$

$$\frac{-A + 6C = 3 (+)}{9C = 3}$$

$$A = -3C = -3 \left( \frac{1}{3} \right) = -1$$

$$C = \frac{1}{3}$$

$$B = -C = -\frac{1}{3}$$

Jadi

$$\int \frac{3}{(x+2)^2(x-1)} dx$$

$$= \int \frac{-1}{(x+2)^2} dx + \int \frac{-\frac{1}{3}}{(x+2)} dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)} dx$$

$$= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{3} \ln(x+2) + \frac{1}{3} \ln(x-1) + C$$

Perhatikan

$$\int \frac{-1}{(x+2)^2} dx = \int \frac{-1}{u^2} du = - \int u^{-2} du = u^{-1} = \frac{1}{u} = \frac{1}{x+2}$$

Misalkan  $u = x + 2 \leftrightarrow du = dx$

### 3. Faktor Kuadratik Dan Tidak Berulang.

Misalkan

$$q(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2) \dots (a_nx^2 + b_nx + c_n)$$

dengan  $n \in B^+$

Maka  $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}$  dengan

$A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$  merupakan konstanta.

Contoh

$$\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(x^2 + 1)(4x + 1)} dx$$

Penyelesaian

$$\frac{6x^2 - 3x + 1}{(x^2 + 1)(4x + 1)} = \frac{A}{4x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

$$6x^2 - 3x + 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(4x + 1)$$

$$6x^2 - 3x + 1 = Ax^2 + A + 4Bx^2 + Bx + 4Cx + C$$

$$6x^2 - 3x + 1 = (A + 4B)x^2 + (B + 4C)x + (A + C)$$

Diperoleh persamaan

$$A + 4B = 6 \leftrightarrow 1 - C + 4B = 6 \leftrightarrow 4B - C = 5$$

$$B + 4C = -3$$

$$A + C = 1 \leftrightarrow A = 1 - C$$

Dengan menggunakan eliminasi

$$4B - C = 5 \leftrightarrow x1 \rightarrow 4B - C = 5$$

$$B + 4C = -3 \leftrightarrow x4 \rightarrow 4B + 16C = -12 (-)$$

$$-17C = 17$$

$$C = -1$$

$$B + 4C = -3 \leftrightarrow B - 4 = -3 \leftrightarrow B = -3 + 4 = 1$$

$$A = 1 - C = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

Jadi

$$\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(x^2 + 1)(4x + 1)} dx = \int \frac{2}{4x + 1} dx + \int \frac{x - 1}{x^2 + 1} dx$$

$$= \int \frac{2}{4x + 1} dx + \int \frac{x}{x^2 + 1} dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(4x + 1) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \arctan x + C$$

Perhatikan

$$\int \frac{x}{(x^2 + 1)} dx = \int \frac{\frac{1}{2} du}{u} = \frac{1}{2} \ln u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

Misalkan  $u = x^2 + 1 \leftrightarrow du = 2x dx \leftrightarrow \frac{1}{2} du = x dx$

Perhatikan

$$\int \frac{1}{(ax + b)} dx = \frac{1}{a} \ln(ax + b)$$

$$\int \frac{2}{4x + 1} dx = 2 \cdot \frac{1}{4} \ln(4x + 1) = \frac{1}{2} \ln(4x + 1)$$

Perhatikan

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \tan \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)} dx = \int \frac{1}{1^2 + x^2} dx = \frac{1}{1} \operatorname{arc} \tan \left( \frac{x}{1} \right) = \operatorname{arc} \tan x$$

#### 4. Faktor Kuadratik Dan Berulang

Misalkan  $q(x) = (a_i x^2 + b_i x + c_i)^n$

Maka  $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{(a_i x^2 + b_i x + c_i)^n} + \frac{A_2 x + B_2}{(a_i x^2 + b_i x + c_i)^{n-1}} + \dots + \frac{A_n x + B_n}{(a_i x^2 + b_i x + c_i)}$

dengan  $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$  merupakan konstanta.

Contoh

$$\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x^2 + 2)^2(x + 3)} dx$$

Penyelesaian

$$\frac{6x^2 - 15x + 22}{(x^2 + 2)^2(x + 3)} = \frac{A}{x + 3} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 2)} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 2)^2}$$

$$6x^2 - 15x + 22$$

$$= A(x^2 + 2)^2 + (Bx + C)(x + 3)(x^2 + 2) + (Dx + E)(x + 3)$$

$$6x^2 - 15x + 22$$

$$= A(x^4 + 4x^2 + 4) + (Bx + C)(x^3 + 3x^2 + 2x + 6) + (Dx^2 + 3Dx + Ex + 3E)$$

$$6x^2 - 15x + 22$$

$$= Ax^4 + 4Ax^2 + 4A + Bx^4 + 3Bx^3 + 2Bx^2 + 6Bx + Cx^3 + 3Cx^2 + 2Cx + 6C + Dx^2 + 3Dx + Ex + 3E$$

$$\begin{aligned}
6x^2 - 15x + 22 &= (A + B)x^4 + (3B + C)x^3 + (4A + 2B + 3C + D)x^2 \\
&\quad + (6B + 2C + 3D + E)x + (4A + 6C + 3E)
\end{aligned}$$

Diperoleh persamaan

$$A + B = 0 \leftrightarrow A = -B$$

$$3B + C = 0 \leftrightarrow C = -3B$$

$$\begin{aligned}
4A + 2B + 3C + D = 6 &\leftrightarrow -4B + 2B + 3(-3B) + D = 6 \\
&\leftrightarrow -11B + D = 6 \leftrightarrow D = 6 + 11B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6B + 2C + 3D + E = -15 &\leftrightarrow 6B + 2(-3B) + 3D + E = -15 \\
&\leftrightarrow 3D + E = -15 \leftrightarrow 3(6 + 11B) + E = -15 \\
&\leftrightarrow 18 + 33B + E = -15 \leftrightarrow 33B + E = -33
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4A + 6C + 3E = 22 &\leftrightarrow -4B + 6(-3B) + 3E = 22 \leftrightarrow -22B + 3E \\
&= 22
\end{aligned}$$

Dapat dilakukan eliminasi

$$33B + E = -33 \leftrightarrow x3 \rightarrow 99B + 3E = -99$$

$$\underline{-22B + 3E = 22 \leftrightarrow x1 \rightarrow -22B + 3E = 22 \quad (-)}$$

$$111B = -111$$

$$B = -1$$

$$A = -B = 1$$

$$C = -3B = -3(-1) = 3$$

$$D = 6 + 11B = 6 + 11(-1) = 6 - 11 = -5$$

$$33B + E = -33 \leftrightarrow 33(-1) + E = -33 \leftrightarrow E = 0$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x^2 + 2)^2(x + 3)} dx \\
&= \int \frac{1}{x + 3} dx + \int \frac{-x + 3}{(x^2 + 2)} dx + \int \frac{-5x}{(x^2 + 2)^2} dx \\
&= \ln(x + 3) + \int \frac{-x}{(x^2 + 2)} dx + \int \frac{3}{(x^2 + 2)} dx + \int \frac{-5x}{(x^2 + 2)^2} dx \\
&= \ln(x + 3) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arc tan} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2x^2 + 4}
\end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned}
&\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x^2 + 2)^2(x + 3)} dx \\
&= \ln(x + 3) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arc tan} \frac{x}{\sqrt{2}} \\
&\quad + \frac{5}{2x^2 + 4}
\end{aligned}$$

Perhatikan

$$\text{Misalkan } u = (x^2 + 2) \leftrightarrow du = 2x dx \leftrightarrow \frac{1}{2} du = x dx$$

$$\int \frac{-x}{(x^2 + 2)} dx = - \int \frac{\frac{1}{2} du}{u} = -\frac{1}{2} \ln u = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 2)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{-5x}{(x^2 + 2)^2} dx &= -5 \int \frac{\frac{1}{2} du}{u^2} = -\frac{5}{2} (-u^{-1}) = \frac{5}{2u} = \frac{5}{2(x^2 + 2)} \\ &= \frac{5}{2x^2 + 4} \end{aligned}$$

Latihan

Selesaikan integral berikut

1.  $\int \frac{2x+1}{(x^2-3x+2)} dx$
2.  $\int \frac{2x^3+x^2+2x-1}{(x^4-1)} dx$
3.  $\int \frac{3x^3-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} dx$

### J. Integral Bentuk akar (Khusus)

Bentuk	Substitusi	Hasil
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \theta$	$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta$	$\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$	$\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta$

$$\text{Jika } \int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

Contoh

$$\bullet \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$\text{Karena } \sqrt{4-x^2} = \sqrt{2^2-x^2} = \sqrt{a^2-x^2}$$

$$\text{Maka } x = 2 \sin \theta \leftrightarrow \sin \theta = \frac{x}{2}$$

$$x = 2 \sin \theta \leftrightarrow \frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta \leftrightarrow dx = 2 \cos \theta d\theta$$

Perhatikan

$$x = 0 \leftrightarrow \sin \theta = \frac{x}{2} = \frac{0}{2} = 0 \leftrightarrow \theta = 0^\circ$$

$$x = 2 \leftrightarrow \sin \theta = \frac{x}{2} = \frac{2}{2} = 1 \leftrightarrow \theta = 90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos \theta d\theta}{\sqrt{4-(2\sin\theta)^2}} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos \theta d\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos \theta d\theta}{\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos \theta d\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos \theta}{2 \cos \theta} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta = \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

- Tentukan nilai  $\int \frac{1}{(x^2+16)} dx$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{a^2+x^2} dx &= \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tan}\left(\frac{x}{a}\right) \\
\int \frac{1}{(x^2+16)} dx &= \int \frac{1}{(4)^2+x^2} dx = \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tan}\left(\frac{x}{4}\right)
\end{aligned}$$

- Tentukan nilai  $\int \frac{2}{(x^2+3)} dx$

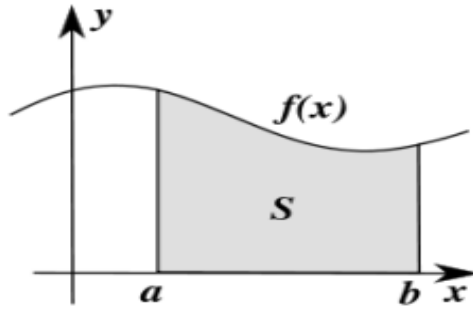
Penyelesaian

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{a^2+x^2} dx &= \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tan}\left(\frac{x}{a}\right) \\
\int \frac{2}{(x^2+3)} dx &= \int \frac{2}{(\sqrt{3})^2+x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tan}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

## K. Luasan daerah Kurva

### a) Luasan daerah Kurva dengan sumbu X

Misalkan S adalah daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = f(x)$ , sumbu X, garis  $x = a$ , dan garis  $x = b$ .



Gambar 2.1 Kurva  $f(x)$

Dengan  $f(x) \geq 0$  pada  $a, b$  maka luas daerah S dapat ditentukan dengan rumus :

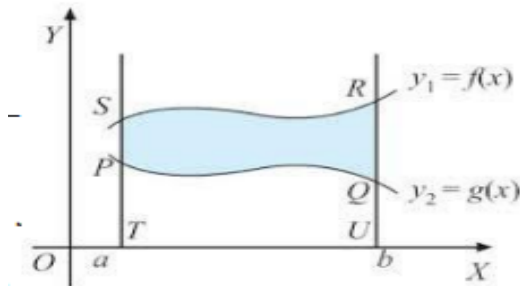
$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (10)$$

Dengan  $f(x) \leq 0$  pada  $a, b$  maka luas daerah S dapat ditentukan dengan rumus :

$$S = - \int_a^b f(x) dx \quad (11)$$

**b) Luasan daerah antar Kurva**

Perhatikan gambar berikut



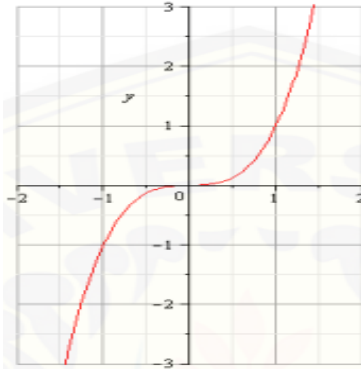
Gambar 2.2 Kurva  $y_1$  dan  $y_2$

Misalkan daerah S adalah daerah yang dibatasi oleh kurva  $y_1 = f(x)$ ,  $y_2 = g(x)$ , garis  $x = a$ , dan garis  $x = b$ .

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (12)$$

Contoh

- Tentukan luas daerah antara kurva  $y = x^3$ , sumbu X,  $x = -1$  dan  $x = 1$  !



Jawab

$$\begin{aligned}
 L &= - \int_{-1}^0 x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx \\
 &= - \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 \\
 &= - \left[ \frac{1}{4} 0^4 - \frac{1}{4} (-1)^4 \right] + \left[ \frac{1}{4} 1^4 - \frac{1}{4} (0)^4 \right] \\
 &= - \left[ 0 - \frac{1}{4} \right] + \left[ \frac{1}{4} - 0 \right] \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ satuan luas}
 \end{aligned}$$

- Tentukan luas daerah antara kurva  $y = x^2 + 3x$  dan  $y = 2x + 2$

Jawab

$$y_1 = y_2$$

$$x^2 + 3x = 2x + 2$$

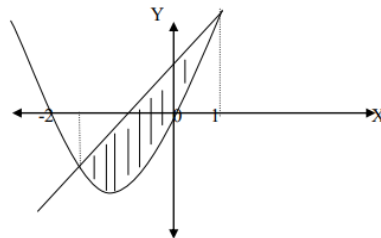
$$x^2 + 3x - 2x - 2 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$(x + 2) = 0 \text{ atau } (x - 1) = 0$$

$$x = -2 \text{ atau } x = 1$$

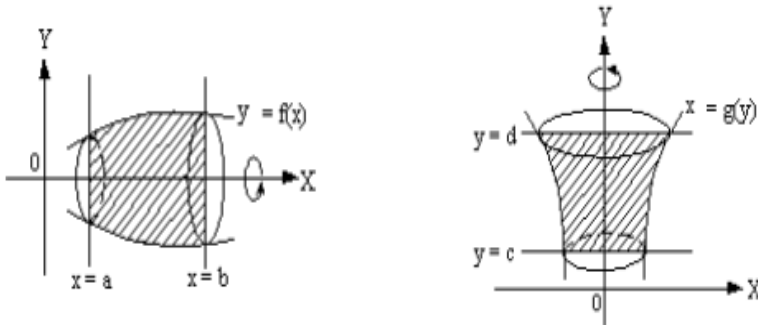


$$\begin{aligned}
 L &= \int_{-2}^1 (y_2 - y_1) dx = \int_{-2}^1 (2x + 2) - (x^2 + 3x) dx \\
 &= \int_{-2}^1 -x + 2 - x^2 dx \\
 &= - \frac{1}{2} x^2 + 2x - \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-2}^1 \\
 &= \left[ - \frac{1}{2} (1)^2 + 2(1) - \frac{1}{3} (1)^3 \right] - \left[ - \frac{1}{2} (-2)^2 + 2(-2) - \frac{1}{3} (-2)^3 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ -\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} \right] - \left[ -2 + (-4) + \frac{8}{3} \right] \\
&= -\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} + 2 + 4 - \frac{8}{3} \\
&= 8 - \frac{3}{6} - \frac{2}{6} - \frac{16}{6} \\
&= \frac{48}{6} - \frac{21}{6} = \frac{27}{6} = 4\frac{3}{6} = 4\frac{1}{2} \text{ satuan luas}
\end{aligned}$$

## L. Volume Kurva

Perhatikan kurva berikut



Gambar 2.3 Kurva mengelilingi sumbu x dan y

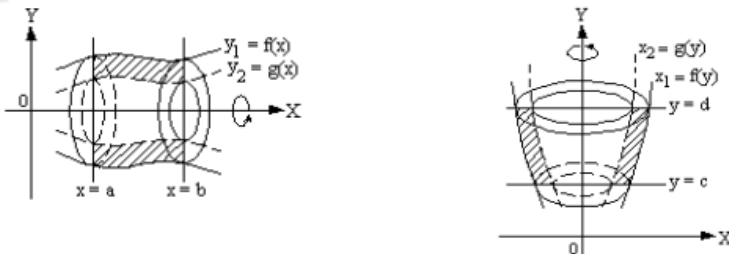
Kurva mengelilingi **sumbu x** yang diputar sejauh  $360^\circ$

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (13)$$

Kurva mengelilingi **sumbu y** yang diputar sejauh  $360^\circ$

$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy \quad (14)$$

Perhatikan kurva berikut



Gambar 2.4 Antar Kurva mengelilingi sumbu x dan y

Antar Kurva mengelilingi **sumbu x** yang diputar sejauh  $360^\circ$

$$V = \pi \int_a^b \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx \quad (15)$$

Antar Kurva mengelilingi **sumbu y** yang diputar sejauh  $360^\circ$

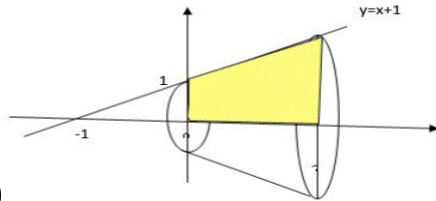
$$V = \pi \int_c^d \{[f(y)]^2 - [g(y)]^2\} dy \quad (16)$$

Contoh

- Hitunglah volume benda putar yang terjadi, jika yang daerah dibatasi kurva  $y = x + 1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ , dan sumbu x diputar mengelilingi sumbu x sejauh  $360^\circ$

Jawab

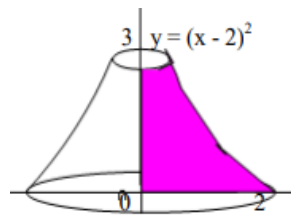
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 (x + 1)^2 dx = \pi \int_0^2 (x + 1)(x + 1) dx \\ &= \pi \int_0^2 (x^2 + 2x + 1) dx \\ &= \pi \left[ \frac{1}{3} x^3 + x^2 + x \right]_0^2 \\ &= \pi \left[ \frac{1}{3} (2)^3 + 2^2 + 2 \right] - \left[ \frac{1}{3} 0^3 + 0^2 + 0 \right] \\ &= \pi \left[ \frac{8}{3} + 4 + 2 \right] - 0 \\ &= \pi \left[ \frac{8}{3} + \frac{12}{3} + \frac{6}{3} \right] \\ &= \frac{26}{3} \pi = 8 \frac{2}{3} \pi \text{ satuan volume} \end{aligned}$$



- Hitung volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi  $y = (x - 2)^2$ , sumbu y,  $y = 0$  dan  $y = 3$  diputar mengelilingi sumbu y sejauh  $360^\circ$  ?

Jawab

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 x^2 dy = \pi \int_0^3 (\sqrt{y} + 2)^2 dy \\ &= \pi \int_0^3 (\sqrt{y} + 2)(\sqrt{y} + 2) dy \\ &= \pi \int_0^3 (y + 4\sqrt{y} + 4) dy \\ &= \pi \left[ \frac{1}{2} y^2 + \frac{8}{3} y\sqrt{y} + 4y \right]_0^3 \\ &= \pi \left[ \frac{1}{2} (3)^2 + \frac{8}{3} 3\sqrt{3} + 4(3) \right] - \left[ \frac{1}{2} 0^2 + 0 + 4 \cdot 0 \right] \\ &= \pi \left[ \frac{9}{2} + 8\sqrt{3} + 12 \right] \\ &= \pi \left[ \frac{9}{2} + \frac{24}{2} + 8\sqrt{3} \right] \\ &= \left[ \frac{33}{2} + 8\sqrt{3} \right] \pi \text{ satuan volume} \end{aligned}$$



## M. Fungsi Hiperbolik

Dalam masalah matematika terapan sering kita jumpai kombinasi-kombinasi tertentu dari fungsi eksponen  $e^x$  dan  $e^{-x}$  sehingga kombinasi fungsi-fungsi tersebut diberi nama khusus, yaitu fungsi hiperbolik. Dimana fungsi hiperbolik yaitu

$$1. \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$2. \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$3. \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

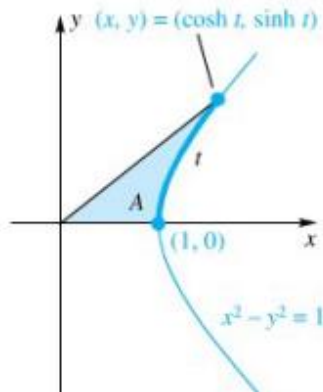
$$4. \operatorname{coth} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$5. \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

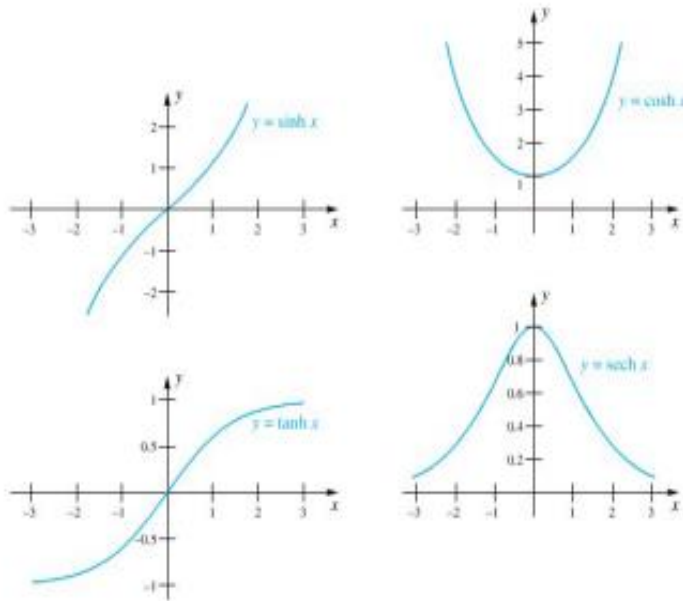
$$6. \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$7. \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \text{ (Identitas Hiperbolik)}$$

Perhatikan Titik-titik yang memenuhi identitas hiperbolik berikut membentuk kurva hiperbola. Hal ini mendasari penamaan fungsi hiperbolik.



Gambar 2.5 Grafik Identitas Fungsi Hiperbolik



Gambar 2.6 Grafik Fungsi Hiperbolik

Dari gambar diatas Fungsi sinh dan tanh merupakan fungsi ganjil. Fungsi cosh dan sech merupakan fungsi genap, nilai fungsinya selalu positif.

a) Diferensial Fungsi Hiperbolik

Perhatikan sifat berikut

1.  $f(x) = \sinh x \leftrightarrow f'(x) = \cosh x$
2.  $f(x) = \cosh x \leftrightarrow f'(x) = \sinh x$
3.  $f(x) = \tanh x \leftrightarrow f'(x) = \operatorname{sech}^2 x$
4.  $f(x) = \operatorname{coth} x \leftrightarrow f'(x) = -\operatorname{cosech}^2 x$
5.  $f(x) = \operatorname{sech} x \leftrightarrow f'(x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$
6.  $f(x) = \operatorname{cosech} x \leftrightarrow f'(x) = -\operatorname{cosech} x \operatorname{coth} x$

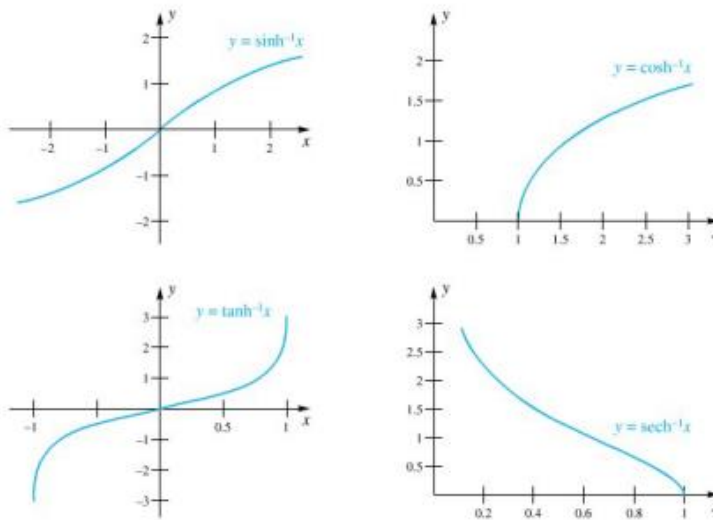
Fungsi hiperbola memenuhi beberapa identitas yang mirip dengan identitas trigonometri

1.  $\sinh(-x) = -\sinh(x)$
2.  $\cosh(-x) = \cosh(x)$
3.  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
4.  $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
5.  $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
6.  $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

b) Invers Fungsi Hiperbolik

Perhatikan sifat berikut

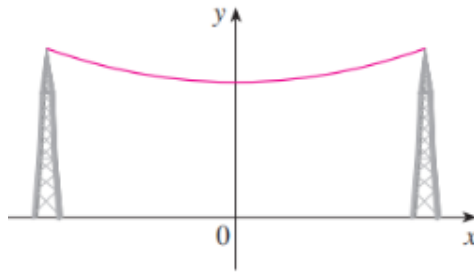
1.  $y = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \leftrightarrow x = \sinh y$
2.  $y = \cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \leftrightarrow x = \cosh y$
3.  $f(x) = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \leftrightarrow x = \tanh y$
4.  $f(x) = \coth^{-1} x \leftrightarrow x = \coth y$
5.  $f(x) = \operatorname{sech}^{-1} x \leftrightarrow x = \operatorname{sech} y$
6.  $f(x) = \operatorname{cosech}^{-1} x \leftrightarrow x = \operatorname{cosech} y$



Gambar 2.7 Grafik Invers Fungsi Hiperbolik

### c) Aplikasi fungsi Hiperbolik

Beberapa penggunaan matematika dan fungsi hiperbolik seperti Aplikasi untuk sains dan rekayasa terjadi setiap kali entitas seperti cahaya, kecepatan, listrik, atau radioaktivitas secara bertahap diserap atau dipadamkan, karena peluruhan dapat diwakili oleh fungsi hiperbolik. Aplikasi yang paling terkenal adalah penggunaan hiperbolik cosinus untuk menggambarkan bentuk kawat gantung. Dapat dibuktikan bahwa jika berat fleksibel kabel (seperti telepon dan saluran listrik) ditunda antara dua titik pada saat yang sama tinggi, maka dibutuhkan bentuk kurva persamaan  $y = c + a \cosh(x/a)$  yang disebut catenary



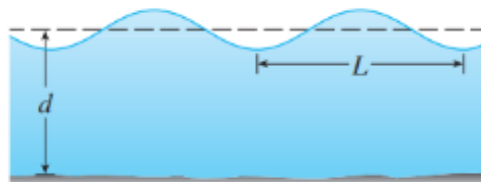
Gambar 2.8 Catenary  $y = c + a \cosh (x/a)$

Dalam bahasa latin catena memiliki arti yaitu “rantai”.

Aplikasi lain fungsi hiperbolik terjadi dalam deskripsi gelombang laut: Kecepatan gelombang air panjang bergerak melintasi badan air

dengan kedalaman oleh fungsi  $v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} \tanh \frac{2\pi d}{L}$

Dimana g merupakan percepatan gravitasi.



Gambar 2.9 Gelombang Laut

:

Buktikan

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Diketahui

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \left(\frac{e^x - 2 + e^{-x}}{4}\right) = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

## UJI KOMPETENSI

1. Hasil dari  $\int (x-3)(x^2-6x+1)^{-3} dx$

a.  $-\frac{1}{8}(x^2-6x+1)^{-4} + c$

b.  $-\frac{1}{4}(x^2-6x+1)^{-4} + c$

c.  $-\frac{1}{2}(x^2-6x+1)^{-4} + c$

d.  $-\frac{1}{4}(x^2-6x+1)^{-2} + c$

e.  $-\frac{1}{2}(x^2-6x+1)^{-2} + c$

2. Hasil dari  $\int (x^2+1)(x^3+3x+5)^{\frac{5}{3}} dx =$

a.  $\frac{1}{3}(x^3+3x+5) \sqrt[3]{(x^3+3x+5)^2} + C$

b.  $\frac{1}{3}(x^3+3x+5) \sqrt[3]{x^3+3x+5} + C$

c.  $\frac{1}{8}(x^3+3x+5)^2 \sqrt[3]{(x^3+3x+5)^2} + C$

d.  $\frac{1}{8}(x^3+3x+5)^2 \sqrt[3]{x^3+3x+5} + C$

e.  $\frac{1}{8}(x^3+3x+5)^2 + C$

3. Hasil dari  $\int \frac{(3-2x)}{\sqrt{2x^2-6x+5}} dx = \dots$

a.  $-2\sqrt{2x^2-6x+5} + c$

b.  $-\sqrt{2x^2-6x+5} + c$

c.  $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-6x+5} + c$

d.  $\sqrt{2x^2-6x+5} + c$

e.  $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-6x+5} + c$

4. Hasil  $\int \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3+4}} dx = \dots$

a.  $4\sqrt{2x^3+4} + C$

b.  $2\sqrt{2x^3+4} + C$

c.  $\sqrt{2x^3 + 4} + C$

d.  $\frac{1}{2}\sqrt{2x^3 + 4} + C$

e.  $\frac{1}{4}\sqrt{2x^3 + 4} + C$

5. Hasil dari  $\int \frac{6x^2}{\sqrt{x^3 + 8}} dx = \dots$

a.  $\sqrt{x^3 + 8} + C$       d.  $3\sqrt{x^3 + 8} + C$

b.  $\frac{3}{2}\sqrt{x^3 + 8} + C$       e.  $4\sqrt{x^3 + 8} + C$

c.  $2\sqrt{x^3 + 8} + C$

6. Hasil dari  $\int \frac{6x^2 + 4}{\sqrt[5]{(x^3 + 2x - 1)^3}} dx = \dots$

a.  $\frac{2}{5}\sqrt[5]{(x^3 + 2x - 1)^2} + C$

b.  $\frac{5}{2}\sqrt[5]{(x^3 + 2x - 1)^2} + C$

c.  $5\sqrt[5]{(x^3 + 2x - 1)^2} + C$

d.  $5\sqrt[5]{(x^3 + 2x - 1)^3} + C$

e.  $5\sqrt[5]{(x^3 + 2x - 1)^4} + C$

7. Hasil dari  $\int \frac{9x^2 + 6}{\sqrt[5]{(x^3 + 2x - 1)^2}} dx = \dots$

a.  $\frac{2}{5}\sqrt[5]{(x^3 + 2x - 1)^2} + C$

b.  $\frac{5}{2}\sqrt[5]{(x^3 + 2x - 1)^2} + C$

c.  $5\sqrt[5]{(x^3 + 2x - 1)^2} + C$

d.  $5\sqrt[5]{(x^3 + 2x - 1)^3} + C$

e.  $5\sqrt[5]{(x^3 + 2x - 1)^4} + C$

8. Hasil  $\int \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2+9x-1}} dx = \dots$

a.  $2\sqrt{3x^2+9x-1} + c$

b.  $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+9x-1} + c$

c.  $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+9x-1} + c$

d.  $\frac{1}{2}\sqrt{3x^2+9x-1} + c$

e.  $\frac{3}{2}\sqrt{3x^2+9x-1} + c$

9. Hasil  $\int 6x\sqrt{3x^2+5} dx = \dots$

a.  $\frac{2}{3}(6x^2+5)\sqrt{6x^2+5} + c$

b.  $\frac{2}{3}(3x^2+5)\sqrt{3x^2+5} + c$

c.  $\frac{2}{3}(x^2+5)\sqrt{x^2+5} + c$

d.  $\frac{3}{2}(x^2+5)\sqrt{x^2+5} + c$

e.  $\frac{3}{2}(3x^2+5)\sqrt{3x^2+5} + c$

10. Hasil dari  $\int \cos^4 2x \sin 2x dx = \dots$

a.  $-\frac{1}{10} \sin^5 2x + c$

b.  $-\frac{1}{10} \cos^5 2x + c$

c.  $-\frac{1}{5} \cos^5 2x + c$

d.  $\frac{1}{5} \cos^5 2x + c$

e.  $\frac{1}{10} \sin^5 2x + c$

11. Hasil  $\int \sin^3 3x \cos 3x dx = \dots$

a.  $\frac{1}{4} \sin^4 3x + c$

b.  $\frac{3}{4} \sin^4 3x + c$

c.  $4 \sin^4 3x + c$

d.  $\frac{1}{3} \sin^4 3x + c$

- e.  $\frac{1}{12} \sin^4 3x + c$
12. Hasil dari  $\int \sin^2 x \cos x \, dx = \dots$
- $\frac{1}{3} \cos^3 x + C$
  - $-\frac{1}{3} \cos^3 x + C$
  - $-\frac{1}{3} \sin^3 x + C$
  - $\frac{1}{3} \sin^3 x + C$
  - $3 \sin^3 x + C$
13. Hasil  $\int x\sqrt{x+1} \, dx = \dots$
- $\frac{2}{5}(x+1)\sqrt{x+1} - \frac{2}{3}(x+1)^2\sqrt{x+1} + c$
  - $\frac{2}{15}(3x^2 + x - 2)\sqrt{x+1} + c$
  - $\frac{2}{15}(3x^2 + x + 4)\sqrt{x+1} + c$
  - $\frac{2}{15}(3x^2 - x - 2)\sqrt{x+1} + c$
  - $\frac{2}{5}(x^2 + x - 2)\sqrt{x+1} + c$
14. Hasil  $\int 4\sin 5x \cdot \cos 3x \, dx = \dots$
- $-2 \cos 8x - 2 \cos 2x + C$
  - $-\frac{1}{4} \cos 8x - \cos 2x + C$
  - $\frac{1}{4} \cos 8x + \cos 2x + C$
  - $-\frac{1}{2} \cos 8x - \cos 2x + C$
  - $\frac{1}{2} \cos 8x + \cos 2x + C$
15. Hasil dari  $\int \sin 3x \cdot \cos x \, dx = \dots$
- $-\frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$
  - $-\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$
  - $-\frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$
  - $\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$
  - $\frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$
16. Hasil dari  $\int (\cos 2x - 2\sin^2 x) \, dx = \dots$

- a.  $2 \sin 2x + x + C$
- b.  $\sin 2x + x + C$
- c.  $\sin 2x - x + C$
- d.  $-2 \sin 2x + x + C$
- e.  $-\cos 2x + x + C$

17. Hasil dari  $\int \left( \frac{1}{2} \cos^2 x + \cos 2x \right) dx = \dots$

- a.  $\frac{5}{8} \sin 2x + \frac{1}{4} x + C$
- b.  $\frac{5}{8} \sin 2x + \frac{1}{8} x + C$
- c.  $\frac{5}{8} \cos 2x + \frac{1}{4} x + C$
- d.  $-\frac{5}{8} \sin 2x + \frac{1}{4} x + C$
- e.  $-\frac{5}{8} \cos 2x + \frac{1}{4} x + C$

18. Hasil dari  $\int \left( \cos 2x - \frac{1}{2} \sin^2 x \right) dx = \dots$

- a.  $\frac{5}{8} \sin 2x - \frac{1}{4} x + C$
- b.  $\frac{5}{8} \sin 2x - \frac{1}{8} x + C$
- c.  $\frac{5}{8} \cos 2x - \frac{1}{4} x + C$
- d.  $-\frac{5}{8} \cos 2x - \frac{1}{4} x + C$
- e.  $-\frac{5}{8} \sin 2x - \frac{1}{4} x + C$

19. Hasil  $\int (\sin^2 x - \cos^2 x) dx$  adalah ...

- a.  $\frac{1}{2} \cos 2x + C$
- b.  $-2 \cos 2x + C$
- c.  $-2 \sin 2x + C$
- d.  $\frac{1}{2} \sin 2x + C$
- e.  $-\frac{1}{2} \sin 2x + C$

20. Hasil dari  $\int (3 - 6 \sin^2 x) dx = \dots$

- a.  $\frac{3}{2} \sin^2 2x + C$
- b.  $\frac{3}{2} \cos^2 2x + C$
- c.  $\frac{3}{4} \sin 2x + C$
- d.  $3 \sin x \cos x + C$

- e.  $\frac{3}{2} \sin 2x \cos 2x + C$
21. Hasil dari  $\int (x^2 - 3x + 1) \sin x \, dx = \dots$
- $(-x^2 + 3x + 1) \cos x + (2x - 3) \sin x + c$
  - $(-x^2 + 3x - 1) \cos x + (2x - 3) \sin x + c$
  - $(x^2 - 3x + 1) \sin x + (2x - 3) \cos x + c$
  - $(x^2 - 3x + 1) \cos x + (2x - 3) \sin x + c$
  - $(x^2 - 3x + 3) \cos x + (2x - 3) \sin x + c$
22. Hasil dari  $\int (x^2 + 1) \cos x \, dx = \dots$
- $x^2 \sin x + 2x \cos x + c$
  - $(x^2 - 1) \sin x + 2x \cos x + c$
  - $(x^2 + 3) \sin x - 2x \cos x + c$
  - $2x^2 \cos x + 2x^2 \sin x + c$
  - $2x \sin x - (x^2 - 1) \cos x + c$
23. Hasil dari  $\int x^2 \sin 2x \, dx = \dots$
- $-\frac{1}{2} x^2 \cos 2x - \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c$
  - $-\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + c$
  - $-\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c$
  - $\frac{1}{2} x^2 \cos 2x - \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + c$
  - $\frac{1}{2} x^2 \cos 2x - \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c$
24. Hasil  $\int_2^4 (-x^2 + 6x - 8) \, dx = \dots$
- $\frac{38}{3}$
  - $\frac{26}{3}$
  - $\frac{20}{3}$
  - $\frac{16}{3}$
  - $\frac{4}{3}$
25. Hasil  $\int_1^3 (x^2 + \frac{1}{6}) \, dx = \dots$
- $9\frac{1}{3}$
  - 9
  - 8
  - $\frac{10}{3}$
  - 3

26. Hasil dari  $\int_1^2 \left( x^2 - \frac{1}{x^2} \right) dx = \dots$

- a.  $\frac{9}{5}$                       c.  $\frac{11}{6}$                       e.  $\frac{19}{6}$   
 b.  $\frac{9}{6}$                       d.  $\frac{17}{6}$

27. Hasil dari  $\int_0^2 3(x+1)(x-6) dx = \dots$

- a. -58                      c. -28                      e. -14  
 b. -56                      d. -16

28. Hasil dari  $\int_{-1}^1 x^2(x-6) dx = \dots$

- a. -4                      c. 0                      e.  $4\frac{1}{2}$   
 b.  $-\frac{1}{2}$                       d.  $\frac{1}{2}$

29. Nilai a yang memenuhi persamaan  $\int_a^1 12x(x^2+1)^2 dx = 14$  adalah

- a. -2                      c. 0                      e. 1  
 b. -1                      d.  $\frac{1}{2}$

30. Hasil dari  $\int_{-1}^0 x^2(x^3+2)^5 dx = \dots$

- a.  $\frac{85}{3}$                       c.  $\frac{63}{18}$                       e.  $\frac{31}{18}$   
 b.  $\frac{75}{3}$                       d.  $\frac{58}{18}$

31. Hasil  $\int_0^\pi (\sin 3x + \cos x) dx = \dots$

- a.  $\frac{10}{3}$                       c.  $\frac{4}{3}$                       e.  $\frac{1}{3}$   
 b.  $\frac{8}{3}$                       d.  $\frac{2}{3}$

32. Hasil  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x - \cos 2x) dx = \dots$

- a.  $-\frac{5}{2}$                       c. 1                      e.  $\frac{5}{2}$

- b.  $\frac{3}{2}$                       d. 2

33. Nilai dari  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 3x + \cos 3x) dx = \dots$

- a.  $\frac{2}{3}$                       c. 0                      e.  $-\frac{2}{3}$   
b.  $\frac{1}{3}$                       d.  $-\frac{1}{3}$

34. Hasil dari  $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \cos(3x - \pi) dx = \dots$

- a. -1                      c. 0                      e. 1  
b.  $-\frac{1}{3}$                       d.  $\frac{1}{3}$

35.  $\int_0^{\pi} x \cos x dx = \dots$

- a. -2                      c. 0                      e. 2  
b. -1                      d. 1

36.  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x dx = \dots$

- a.  $\pi + 1$                       c. -1                      e.  $\pi + 1$   
b.  $\pi - 1$                       d.  $\pi$

37.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 5x \sin x dx = \dots$

- a.  $-\frac{1}{2}$                       c.  $\frac{1}{12}$                       e.  $\frac{5}{12}$   
b.  $-\frac{1}{6}$                       d.  $\frac{1}{8}$

38.  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(x + \frac{\pi}{3}) \cos(x + \frac{\pi}{3}) dx = \dots$

- a.  $-\frac{1}{4}$                       c.  $\frac{1}{8}$                       e.  $\frac{3}{8}$   
b.  $-\frac{1}{8}$                       d.  $\frac{1}{4}$

39. Nilai dari  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x - \pi) \sin(3x - \pi) dx =$

a.  $-\frac{1}{6}$                       c. 0                      e.  $\frac{1}{6}$

b.  $-\frac{1}{12}$                       d.  $\frac{1}{12}$

40.  $\int_0^1 \sin^2 \pi x \cos^2 \pi x dx = \dots$

a. 0                      c.  $\frac{1}{4}$                       e.  $\frac{1}{4} \pi$

b.  $\frac{1}{8}$                       d.  $\frac{1}{8} \pi$

41. Hasil dari  $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} 2 \sin^4 x - \cos^4 x dx = \dots$

a. -1                      c. 1                      e.  $\frac{1}{2} \sqrt{3}$

b. 0                      d.  $\frac{1}{2} \sqrt{2}$

42. Diberikan  $\int_1^3 (2ax^2 - 2x) dx = 44$ . Nilai a = ...

a. 1                      c. 3                      e. 6

b. 2                      d. 4

43. Di berikan  $\int_{-1}^a (3x^2 - 2x) dx = 20$ .

Nilai  $a^2 + a = \dots$

a. 2                      c. 6                      e. 24

b. 3                      d. 12

44. Diketahui  $\int_1^p (3x^2 + 2x) dx = 78$ .

Nilai  $\frac{3}{2} p = \dots$

a. 4                      c. 8                      e. 12

b. 6                      d. 9

45. Diketahui  $\int_1^p 3x(x + \frac{2}{3}) dx = 78$ .

Nilai  $(-2p) = \dots$

- a. 8                      c. 0                      e. -8  
b. 4                      d. -4
46. Diketahui  $\int_1^p (3t^2 + 6t - 2)dt = 14$ .  
Nilai  $(-4p) = \dots$
- a. -6                      c. -16                      e. -32  
b. -8                      d. -24
47.  $\int_2^a (\frac{4}{x^2} + 1)dx = \frac{1}{a}$ . Nilai  $a^2 = \dots$
- a. -5                      c. 1                      e. 5  
b. -3                      d. 3
48. Luas daerah yang dibatasi parabola  $y = x^2 - x - 2$  dengan garis  $y = x + 1$  pada interval  $0 \leq x \leq 3$  adalah ... satuan luas
- a. 5                      c. 9                      e.  $10\frac{2}{3}$   
b. 7                      d.  $10\frac{1}{3}$
49. Luas daerah yang dibatasi kurva  $y = 4 - x^2$ ,  
 $y = -x + 2$  dan  $0 \leq x \leq 2$  adalah ... satuan luas
- a.  $\frac{8}{3}$                       c.  $\frac{14}{3}$                       e.  $\frac{26}{3}$   
b.  $\frac{10}{3}$                       d.  $\frac{16}{3}$
50. Luas daerah yang dibatasi kurva  $y = x^2$ ,  
 $y = x + 2$ , sumbu Y dikuadran I adalah ...
- a.  $\frac{2}{3}$                       c.  $\frac{6}{3}$                       e.  $\frac{10}{3}$   
b.  $\frac{4}{3}$                       d.  $\frac{8}{3}$
51. Luas daerah di kuadran I yang dibatasi kurva  
 $y = x^3$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$ , dan garis  $x = 2$  adalah ... satuan luas
- a.  $2\frac{1}{4}$                       c.  $3\frac{1}{4}$                       e.  $4\frac{1}{4}$   
b.  $2\frac{1}{2}$                       d.  $3\frac{1}{2}$
52. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva  
 $y = \sqrt{x+1}$ , sumbu X dan  $0 \leq x \leq 8$  adalah ... satuan luas

- a. 6                      c.  $17\frac{1}{3}$                       e.  $18\frac{2}{3}$
- b.  $6\frac{2}{3}$                       d. 18
53. Luas yang dibatasi oleh kurva  $y = 2x^2 - 8$ , dan sumbu X, pada  $0 \leq x \leq 3$  adalah .... satuan luas
- a.  $10\frac{2}{3}$                       c.  $15\frac{1}{3}$                       e.  $17\frac{1}{3}$
- b.  $13\frac{1}{3}$                       d.  $16\frac{2}{3}$
54. Luas daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva  $x = y^2$  dan garis  $y = x - 2$  adalah ... satuan luas
- a. 0                      c.  $4\frac{1}{2}$                       e. 16
- b. 1                      d. 6
55. Luas daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva  $y = 6x - x^2$  dan  $y = x^2 - 2x$  pada interval  $0 \leq x \leq 5$  sama dengan ... satuan luas
- a. 30                      c.  $\frac{64}{3}$                       e.  $\frac{14}{3}$
- b. 26                      d.  $\frac{50}{3}$
56. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = x^2 - 9x + 15$  dan  $y = -x^2 + 7x - 15$  adalah ... satuan luas
- a.  $2\frac{2}{3}$                       c.  $2\frac{1}{3}$                       e.  $4\frac{1}{3}$
- b.  $2\frac{2}{5}$                       d.  $3\frac{2}{3}$
57. Luas daerah pada kuadran I yang dibatasi oleh kurva  $y = x^2$ , sumbu Y, dan garis  $x + y = 12$  adalah ... satuan luas
- a. 57,5                      c. 49,5                      e. 22,5
- b. 51,5                      d. 25,5
58. Luas daerah yang dibatasi parabola  $y = 8 - x^2$  dan garis  $y = 2x$  adalah ... satuan luas
- a. 36                      c.  $41\frac{2}{3}$                       e.  $46\frac{2}{3}$
- b.  $41\frac{1}{3}$                       d. 46
59. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = 9 - x^2$  dan garis  $y = x + 3$  adalah.... satuan luas
- a.  $2\frac{5}{6}$                       c.  $19\frac{5}{6}$                       e.  $21\frac{5}{6}$

- b.  $3 \frac{5}{6}$       d.  $20 \frac{5}{6}$
60. Volum benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = 2x - x^2$  dan  $y = 2 - x$  diputar mengelilingi sumbu X sejauh  $360^\circ$  adalah ... satuan volume
- a.  $\frac{1}{5} \pi$       c.  $\frac{3}{5} \pi$       e.  $\pi$   
 b.  $\frac{2}{5} \pi$       d.  $\frac{4}{5} \pi$
61. Volum benda putar yang terjadi bila daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = x^2$  dan  $y = \sqrt{x}$  diputar mengelilingi sumbu X sejauh  $360^\circ$  adalah ... satuan volume
- a.  $\frac{3}{10} \pi$       c.  $\frac{1}{3} \pi$       e.  $2\pi$   
 b.  $\frac{5}{10} \pi$       d.  $\frac{10}{3} \pi$
62. Daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = 4 - x$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$ , dan sumbu X diputar mengelilingi sumbu X sejauh  $360^\circ$ , maka volume benda putar yang terjadi adalah ... satuan volume
- a.  $4 \frac{2}{3} \pi$       c.  $8 \frac{2}{3} \pi$       e.  $12 \frac{1}{3} \pi$   
 b.  $6 \frac{1}{3} \pi$       d.  $10 \frac{2}{3} \pi$
63. Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = 2x$  dan parabola  $y = x^2$  diputar sejauh  $360^\circ$  mengelilingi sumbu X adalah ... satuan volume
- a.  $\frac{32}{5} \pi$       c.  $\frac{52}{15} \pi$       e.  $\frac{32}{15} \pi$   
 b.  $\frac{64}{15} \pi$       d.  $\frac{48}{15} \pi$
64. Volume benda yang terjadi, jika daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = 9 - x^2$  dan garis  $y = x + 7$  diputar mengelilingi sumbu X sejauh  $360^\circ$  adalah ... satuan volume
- a.  $178 \frac{14}{15} \pi$       c.  $53 \frac{4}{5} \pi$       e.  $35 \frac{4}{5} \pi$   
 b.  $66 \frac{3}{5} \pi$       d.  $51 \frac{4}{5} \pi$
65. Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = x^2 + 1$  dan  $y = 3$  diputar mengelilingi sumbu Y sejauh  $360^\circ$  adalah ... satuan volume
- a.  $2\pi$       c.  $3\pi$       e.  $5\pi$

b.  $2\frac{1}{2}\pi$       d.  $4\frac{1}{3}\pi$

66. Volum benda putar yang terjadi karena daerah yang dibatasi oleh parabola  $y = x^2$  dan  $y^2 = 8x$  diputar  $360^\circ$  mengelilingi sumbu Y adalah .... satuan volume

a.  $2\frac{4}{5}\pi$       c.  $4\frac{4}{5}\pi$       e.  $9\frac{4}{5}\pi$

b.  $3\frac{4}{5}\pi$       d.  $5\frac{4}{5}\pi$

67. Volume benda yang terjadi, jika daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = \sqrt{x-2}$  dan garis  $2y - x + 2 = 0$  diputar mengelilingi sumbuY sejauh  $360^\circ$  adalah ... satuan volume

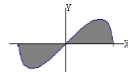
a.  $1\frac{1}{3}\pi$       c.  $5\pi$       e.  $9\frac{3}{5}\pi$

b.  $2\pi$       d.  $9\pi$

68. Gambar berikut merupakan kurva dengan persamaan  $y = \sqrt{30-30x^2}$ . Jika daerah yang diarsir diputar mengelilingi sumbu X, maka volume benda putar yang terjadi sama dengan ... satuan volume

a.  $6\pi$       c.  $9\pi$       e.  $12\pi$

b.  $8\pi$       d.  $10\pi$



69. Volume benda putar yang terjadi karena daerah yang dibatasi oleh sumbu X, sumbu Y, dan kurva  $y = \sqrt{4-x}$  diputar terhadap sumbu Y sejauh  $360^\circ$ , dapat dinyatakan dengan ...

a.  $\pi \int_0^2 (4-y^2)^2 dy$  satuan volume

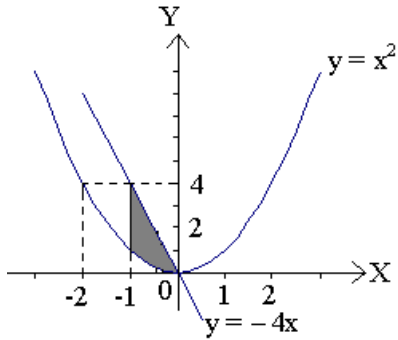
b.  $\pi \int_0^2 \sqrt{4-y^2} dy$  satuan volume

c.  $\pi \int_0^2 (4-y^2) dy$  satuan volume

d.  $2\pi \int_0^2 (4-y^2)^2 dy$  satuan volume

e.  $2\pi \int_0^2 (4-y^2) dy$  satuan volume

70. Perhatikan gambar di bawah ini:



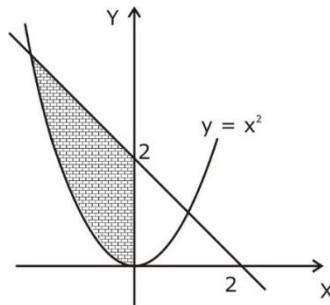
Jika daerah yang diarsir pada gambar diputar mengelilingi sumbu X sejauh  $360^\circ$  maka volume benda putar yang terjadi adalah ... satuan volume

- a.  $\frac{123}{15} \pi$       c.  $\frac{77}{15} \pi$       e.  $\frac{35}{15} \pi$   
 b.  $\frac{83}{15} \pi$       d.  $\frac{43}{15} \pi$

71. Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh sumbu Y, kurva  $y = x^2$ , garis  $y = 2$ , dan  $y = 5$  diputar mengelilingi sumbu Y adalah ... satuan volume

- a.  $3 \frac{1}{2}$       c.  $9 \frac{1}{2}$       e.  $11 \frac{1}{2}$   
 b.  $4 \frac{1}{2}$       d.  $10 \frac{1}{2}$

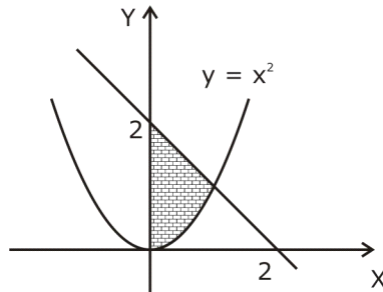
72. Perhatikan gambar berikut!



Jika daerah yang diarsir diputar mengelilingi sumbu-X sejauh  $360^\circ$ , maka volume benda putar yang terjadi adalah ... satuan volume

- a.  $\frac{88}{15} \pi$       c.  $\frac{184}{15} \pi$       e.  $\frac{280}{15} \pi$   
 b.  $\frac{96}{15} \pi$       d.  $\frac{186}{15} \pi$

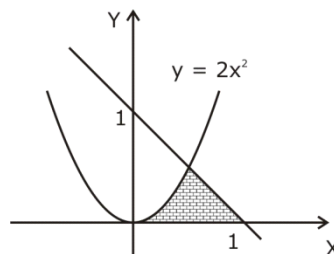
73. Perhatikan gambar berikut!



Jika daerah yang diarsir diputar mengelilingi sumbu-X sejauh  $360^\circ$ , maka volume benda putar yang terjadi adalah ... satuan volum

- a.  $16\pi$       c.  $\frac{32}{5}\pi$       e.  $\frac{32}{15}\pi$   
 b.  $\frac{32}{3}\pi$       d.  $\frac{32}{10}\pi$

74. Perhatikan gambar berikut!



Jika daerah yang diarsir diputar mengelilingi sumbu-Y sejauh  $360^\circ$ , maka volume benda putar yang terjadi adalah ...

- a.  $\frac{6}{48}\pi$       c.  $\frac{9}{48}\pi$       e.  $\frac{11}{48}\pi$   
 b.  $\frac{8}{48}\pi$       d.  $\frac{10}{48}\pi$

75. Sebuah benda bergerak dari keadaan diam dengan percepatan pada setiap saat  $t$  ditentukan oleh  $a(t) = 5 - t$ . Pada gerakan tersebut, benda akan berhenti setelah ... detik

- a. 3              c. 10              e. 15  
 b. 5              d. 12

## BAB 3

### PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDER 1

Studi mengenai persamaan diferensial dimulai segera setelah penemuan Kalkulus dan Integral. Pada tahun 1676 Newton menyelesaikan sebuah persamaan diferensial dengan menggunakan deret tak hingga, sebelas tahun setelah penemuannya tentang bentuk fluksional dari kalkulus diferensial pada tahun 1665. Newton tidak mempublikasikan hal tersebut sampai dengan tahun 1693, pada saat Leibniz menghasilkan rumusan persamaan diferensial yang pertama. Perkembangan persamaan diferensial sangat pesat dalam tahun-tahun berikutnya. Dalam tahun 1694-1697 John Bernoulli menjelaskan "Metode Pemisahan Variabel" dan membuktikan bahwa persamaan diferensial homogen orde satu dapat direduksi menjadi bentuk persamaan diferensial dengan variabel-variabel yang dapat dipisahkan. John Bernoulli dan saudaranya Jacob Bernoulli (yang menemukan Persamaan Diferensial Bernoulli) berhasil menyederhanakan sejumlah besar persamaan diferensial menjadi bentuk yang lebih sederhana yang dapat mereka selesaikan

#### A. Pengantar Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan suatu persamaan yang memuat turunan terhadap satu atau lebih dari variabel-variabel bebas (*Independent Variable*). Penentuan order suatu persamaan diferensial tergantung pada kandungan fungsi turunan di dalam persamaan diferensial tersebut. Order atau tingkat suatu persamaan diferensial merupakan pangkat tertinggi turunan dalam persamaan diferensial. Persamaan diferensial dibagi menjadi 2 yaitu

##### 1. Persamaan Diferensial Implisit

Bentuk Persamaan Diferensial (PD) Implisit:

$$f \left[ (x, y), \frac{dy}{dx} \right] = 0, \text{ atau } f(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

Contoh

Tentukan jenis dan penyelesaian persamaan diferensial (PD)

$$3xyy' + x^2 - 1 = 0$$

Jawab

Jenis PD di atas adalah PD implisit order satu karena terdapat suku  $3xyy'$  dimana  $y' = \frac{dy}{dx}$  yang artinya merupakan turunan pertama sehingga dapat dikatakan sebagai order satu

$$3xyy' + x^2 - 1 = 0$$

$$3xyy' = -x^2 + 1$$

$$yy' = \frac{-x^2 + 1}{3x}$$

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{-x^2 + 1}{3x}$$

$$ydy = \frac{-x^2 + 1}{3x} dx$$

$$\int y dy = \int \frac{-x^2 + 1}{3x} dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 + C = \int \frac{-x^2}{3x} dx + \int \frac{1}{3x} dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 + C = -\frac{1}{3} \int x dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 + C = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3} \ln x + C$$

$$3y^2 + C = -x^2 + 2 \ln x + C$$

$$3y^2 + x^2 - 2 \ln x = C$$

## 2. Persamaan diferensial Eksplisit

Bentuk Persamaan Diferensial Eksplisit:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \text{ atau } y' = f(x, y) \quad (2)$$

Contoh

Tentukan jenis dan penyelesaian persamaan diferensial (PD)

$$y' = 5x^2 + 7x - 3$$

Jawab

Jenis PD di atas adalah PD Eksplisit order satu karena terdapat suku  $y'$  dimana  $y' = \frac{dy}{dx}$  yang artinya merupakan turunan pertama sehingga dapat dikatakan sebagai order satu

$$y' = 5x^2 + 7x - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^2 + 7x - 3$$

$$dy = (5x^2 + 7x - 3)dx$$

$$\int 1 dy = \int (5x^2 + 7x - 3)dx$$

$$y + C = \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + C$$

$$y = \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + C$$

Latihan

Tentukan jenis dan penyelesaian persamaan diferensial (PD) di bawah ini.

1.  $(1 + 2x^2) \frac{dy}{dx} = xy$
2.  $x^2y^2y' + 5x - 2 = 0$
3.  $2xy^2dx - (x - 5)dy = 0$
4.  $y''' = 5x^2 + 7x - 3$
5.  $y'' = A \tan x + B \sin x$

### B. Persamaan Diferensial Order 1

Persamaan Diferensial (PD) Order 1 dinamakan juga Persamaan diferensial Linear order 1 karena pangkat tertinggi dari suatu turunannya adalah 1.

PD linear order satu  $f(x, y, y') = 0$  yang dapat dinyatakan dalam

$$\text{bentuk } A(x, y) \frac{dy}{dx} + B(x, y) = 0 \quad (3)$$

Persamaan (3) dapat diubah menjadi bentuk lain

$$A(x, y)dy + B(x, y)dx = 0 \quad (4)$$

Contoh

1.  $\frac{dy}{dx} = 5xy - \sin x$
2.  $y' = 3 \ln x + 7x$
3.  $(x - \cos x + y) dx + (2y - x + \tan x) dy = 0$
4.  $(\sin 2x - y) dy + (\cos y - 2x) dx = 0$

Persamaan diferensial (PD) order satu merupakan bentuk PD yang paling sederhana, karena hanya melibatkan turunan pertama dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Jika dalam persamaan tersebut variabel bebas dan variabel tak bebasnya berada pada sisi yang berbeda dari tanda persamaannya, maka disebut PD yang terpisah dan untuk menentukan penyelesaiannya tinggal diintegrasikan. Jika tidak demikian, maka disebut PD tak terpisah. Suatu PD order satu yang tak terpisah biasanya dapat dengan mudah dijadikan PD terpisah melalui penggantian (substitusi) dari salah satu variabelnya. Persamaan (4) dapat direduksi menjadi bentuk persamaan berikut

$$f(x)dx + g(y)dy = 0 \quad (5)$$

Maka variabel-variabel dari persamaan (4) dinyatakan terpisah dan persamaan diferensialnya disebut **persamaan diferensial dengan variabel terpisah**. Penyelesaian persamaan diferensialnya diberikan oleh

$$\int f(x) dx + \int g(y) dy = C \quad (6)$$

Dimana  $C$  sebagai konstanta.

Contoh

Selesaikan Persamaan Diferensial berikut

1.  $3yy' - 2x = 0$

Penyelesaian:

Dengan pemisahan variabel akan diperoleh

$$3yy' = 2x$$

$$3y \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$3y dy = 2x dx$$

$$\int 3y dy = \int 2x dx$$

$$\frac{3}{2}y^2 + C = x^2 + C$$

$$\frac{3}{2}y^2 - x^2 = C$$

Jadi solusi persamaan diferensial di atas adalah  $\frac{3}{2}y^2 - x^2 = C$

2.  $y \cos^2 x dy + \sin x dx = 0$

Penyelesaian:

Dengan pemisahan variabel akan diperoleh

$$y \cos^2 x dy + \sin x dx = 0$$

$$y \cos^2 x dy = -\sin x dx$$

$$y \cos^2 x dy = -\sin x dx$$

$$y dy = -\frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$\int y dy = \int \frac{-\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 + C = -\frac{1}{\cos x} + C$$

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{\cos x} = C$$

$$\frac{1}{2}y^2 + \sec x = C$$

Perhatikan

$$\int \frac{-\sin x}{\cos^2 x} dx$$

Misalkan  $u = \cos x \leftrightarrow du = -\sin x dx$

$$\int \frac{-\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2} du = -u^{-1} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\cos x}$$

Jadi solusi persamaan diferensial di atas  $\frac{1}{2}y^2 + \sec x = C$

3.  $5xyy' + y^2 - 3 = 0$

Penyelesaian:

Dengan pemisahan variabel akan diperoleh

$$5xy \frac{dy}{dx} + y^2 - 3 = 0$$

$$5xy dy + (y^2 - 3) dx = 0$$

$$5xy dy = -(y^2 - 3) dx$$

$$\frac{y}{(y^2 - 3)} dy = -\frac{1}{5x} dx$$

$$\int \frac{y}{(y^2 - 3)} dy = -\int \frac{1}{5x} dx$$

$$\frac{1}{2} \ln(y^2 - 3) + C = -\frac{1}{5} \ln x + C$$

$$\frac{1}{2} \ln(y^2 - 3) + \frac{1}{5} \ln x = C$$

$$5 \ln(y^2 - 3) + 2 \ln x = C$$

$$\ln(y^2 - 3)^5 + \ln x^2 = \ln C$$

$$\ln(y^2 - 3)^5 x^2 = \ln C$$

$$(y^2 - 3)^5 x^2 = C$$

**Ingat:**

$$m \ln a = \ln a^m$$

$$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$$

Perhatikan

$$\int \frac{y}{(y^2 - 3)} dy$$

Misalkan  $u = y^2 - 3 \leftrightarrow du = 2y dy \leftrightarrow \frac{1}{2} du = y dy$

$$\int \frac{y}{(y^2 - 3)} dy = \int \frac{\frac{1}{2} du}{u} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln u = \frac{1}{2} \ln(y^2 - 3)$$

Jadi solusi persamaan diferensial di atas adalah  $(y^2 - 3)^5 x^2 = C$

4.  $y' + xy = 0$  dimana  $y(0) = 1$

Penyelesaian:

Dengan pemisahan variabel akan diperoleh

$$y' + xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -xy$$

$$\frac{1}{y} dy = -x dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int x dx$$

$$\ln y = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x^2 + C}$$

**Ingat :  $\ln a = b \leftrightarrow a = e^b$**

Jadi solusi persamaan diferensial di atas adalah  $y = e^{-\frac{1}{2}x^2 + C}$

Untuk mendapatkan solusi khususnya  $y(0) = 1$

$$1 = e^{-\frac{1}{2}0^2} + C \leftrightarrow C = 0$$

Jadi solusi khusus persamaan diferensial di atas  $y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Latihan

Selesaikan persamaan diferensial berikut

1.  $(x - 4)y^2 dx - x^3(y^2 - 3)dy = 0$
2.  $x \sin y dx + (x^2 + 1) \cos y dy = 0, y(1) = \frac{\pi}{2}$
3.  $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, y(0) = -1$

### C. Persamaan Diferensial Homogen

Definisi 1.

Sebuah fungsi persamaan diferensial  $f(x, y)$  disebut persamaan homogen bila terdapat  $n \in \mathbb{R}$ , sehingga

$$f(kx, ky) = k^n f(x, y) \quad (7)$$

dimana  $n$  dikatakan sebagai order dari persamaan diferensial homogen  $f(x, y)$ . Pada suatu persamaan yang dinyatakan sebagai PD Homogen memiliki ciri yaitu derajat pada setiap sukunya adalah sama.

### Contoh

Periksalah persamaan di bawah ini merupakan persamaan diferensial homogen atau tidak?

1.  $f(x, y) = 2x - 3y$

Penyelesaian

$$f(x, y) \leftrightarrow f(kx, ky) = 2kx - 3ky = k(2x - 3y)$$

Merupakan PD Homogen berorde 1

2.  $f(x, y) = 2x^2 + xy - 5y^2$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} f(x, y) \leftrightarrow f(kx, ky) &= 2(kx)^2 + (kx)(ky) - 5(ky)^2 \\ &= 2k^2x^2 + k^2xy - 5k^2y^2 \\ &= k^2(2x^2 + xy - 5y^2) \end{aligned}$$

Merupakan PD Homogen berorde 2

3.  $f(x, y) = x^2 + y$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} f(x, y) \leftrightarrow f(kx, ky) &= (kx)^2 + ky = k^2x^2 + ky \\ &= k(kx^2 + y) \end{aligned}$$

Bukan merupakan PD Homogen

### Bentuk Umum

$$A(x, y)dy + B(x, y)dx = 0 \quad (8)$$

Dimana  $A(x, y)$  dan  $B(x, y)$  merupakan PD Homogen.

Setelah kedua fungsi telah PD Homogen, selanjutnya substitusikan dengan

$$\frac{y}{x} = z \leftrightarrow y = xz \leftrightarrow dy = x dz + z dx \quad (9)$$

$$\frac{x}{y} = z \leftrightarrow x = yz \leftrightarrow dx = y dz + z dy \quad (10)$$

**Catatan** : Jika  $A(x, y)$  dan  $B(x, y)$  tidak homogen maka tidak perlu diselesaikan/tidak dilanjutkan.

### Contoh

Tentukan apakah PD di bawah ini merupakan PD Homogen dan Selesaikanlah

1.  $(x + y) dx + x dy = 0$

Penyelesaian

Diperiksa kedua suku merupakan PD Homogen?

$$(x + y) \leftrightarrow f(x, y) = f(kx, ky) = kx + ky = k(x + y)$$

$$x \leftrightarrow f(x, y) = f(kx, ky) = kx$$

Jadi kedua suku merupakan PD Homogen sehingga disubstitusikan ke dalam bentuk

$$\frac{y}{x} = z \leftrightarrow y = xz \leftrightarrow dy = x dz + z dx$$

Maka substitusikan pemisalan ke soal, sehingga

$$(x + y) dx + x dy = 0$$

$$(x + xz) dx + x(x dz + z dx) = 0$$

$$x dx + xz dx + x^2 dz + xz dx = 0$$

$$x dx + 2xz dx + x^2 dz = 0$$

$$x(1 + 2z) dx + x^2 dz = 0$$

$$x(1 + 2z) dx = -x^2 dz$$

$$-\frac{x}{x^2} dx = \frac{1}{1 + 2z} dz$$

$$-\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{1 + 2z} dz$$

$$-\ln x = \frac{1}{2} \ln(1 + 2z) + C$$

$$\frac{1}{2} \ln(1 + 2z) + \ln x = C$$

$$\ln(1 + 2z) + 2 \ln x = C$$

$$\ln(1 + 2z) + \ln x^2 = C$$

$$\ln(1 + 2z) x^2 = \ln C$$

$$(1 + 2\frac{y}{x}) x^2 = C$$

Perhatikan

$$\int \frac{1}{1 + 2z} dz$$

$$\text{Misalkan } u = 1 + 2z \leftrightarrow du = 2 dz \leftrightarrow \frac{1}{2} du = dz$$

$$\int \frac{1}{1 + 2z} dz = \int \frac{1}{2} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln u = \frac{1}{2} \ln(1 + 2z)$$

Maka penyelesaian persamaan diferensial diatas  $(1 + 2\frac{y}{x}) x^2 = C$

2.  $3xy dx + (x^2 - y^2) dy = 0$

Penyelesaian

Diperiksa kedua suku merupakan PD Homogen?

$$3xy \leftrightarrow f(x, y) = f(kx, ky) = 3kxky = k^2(3xy)$$

$$(x^2 - y^2) \leftrightarrow f(x, y) = f(kx, ky) = (kx)^2 - (ky)^2 = k^2x^2 - k^2y^2 = k^2(x^2 - y^2)$$

Jadi kedua suku merupakan PD Homogen sehingga disubstitusikan ke dalam bentuk

$$\frac{x}{y} = z \leftrightarrow x = yz \leftrightarrow dx = y dz + z dy$$

Maka substitusikan pemisalan ke soal, sehingga

$$3xy dx + (x^2 - y^2)dy = 0$$

$$3(yz)y (y dz + z dy) + ((yz)^2 - y^2)dy = 0$$

$$3y^2z (y dz + z dy) + ((yz)^2 - y^2)dy = 0$$

$$3y^3z dz + 3y^2z^2 dy + y^2z^2 dy - y^2 dy = 0$$

$$3y^3z dz + 4y^2z^2 dy - y^2 dy = 0$$

$$3y^3z dz + (4y^2z^2 - y^2)dy = 0$$

$$3y^3z dz + y^2(4z^2 - 1)dy = 0$$

$$3y^3z dz = -y^2(4z^2 - 1)dy$$

$$\frac{z}{(4z^2 - 1)} dz = -\frac{y^2}{3y^3} dy$$

$$\int \frac{z}{(4z^2 - 1)} dz = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{y} dy$$

$$\frac{1}{8} \ln(4z^2 - 1) = -\frac{1}{3} \ln y + C$$

$$3 \ln(4z^2 - 1) = -8 \ln y + C$$

$$\ln(4z^2 - 1)^3 = -\ln y^8 + C$$

$$\ln(4z^2 - 1)^3 + \ln y^8 = C$$

$$\ln (4z^2 - 1)^3 y^8 = C$$

$$\left[4 \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1\right]^3 y^8 = C$$

$$\left(\frac{4x^2}{y^2} - 1\right)^3 y^8 = C$$

Perhatikan

$$\int \frac{z}{(4z^2 - 1)} dz$$

Misalkan

$$u = (4z^2 - 1) \leftrightarrow du = 8z dz \leftrightarrow \frac{1}{8} du = z dz$$

$$\int \frac{z}{(4z^2 - 1)} dz = \int \frac{\frac{1}{8} du}{u} = \frac{1}{8} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{8} \ln u = \frac{1}{8} \ln(4z^2 - 1)$$

Maka penyelesaian persamaan diferensial diatas  $\left(\frac{4x^2}{y^2} - 1\right)^3 y^8 = C$

Latihan

Selesaikan persamaan diferensial

1.  $(x^2 - 3y^2)dx + 2xy dy = 0$
2.  $2x \frac{dy}{dx} = -(x^2 + y^2)$
3.  $(y^2 - x^2)dx + xy dy = 0$

#### D. Persamaan Diferensial Non Homogen

Persamaan diferensial non homogen disebut juga persamaan diferensial koefisien linear. Adapun bentuk umumnya

$$(ax + by + c)dx + (px + qy + r)dy = 0 \quad (11)$$

Suatu PD non homogen jika

$$f(kx, ky) \neq k^n f(x, y) \quad (12)$$

Dimana  $(ax + by + c)$  dan  $(px + qy + r)$  merupakan PD non Homogen. Setelah kedua fungsi telah PD non Homogen, selanjutnya substitusikan dengan

$$u = ax + by + c \leftrightarrow du = adx + bdy \quad (13)$$

$$v = px + qy + r \leftrightarrow dv = pdx + qdy \quad (14)$$

Untuk mencari  $dx$  dan  $dy$  dilakukan dengan cara eliminasi persamaan (13) dan (14)

$$du = adx + bdy \rightarrow x q \leftrightarrow qdu = aqdx + bqdy$$

$$\underline{dv = pdx + qdy \rightarrow x b \leftrightarrow bdv = bpdx + bqdy \quad (-)}$$

$$qdu - bdv = aqdx - bpdx$$

$$qdu - bdv = (aq - bp)dx$$

$$dx = \frac{qdu - bdv}{aq - bp}$$

Perhatikan

$$du = adx + bdy$$

$$du = a \frac{qdu - bdv}{aq - bp} + bdy$$

$$du - a \left( \frac{qdu - bdv}{aq - bp} \right) = bdy$$

$$du \frac{aq - bp}{aq - bp} - a \left( \frac{qdu - bdv}{aq - bp} \right) = bdy$$

$$\frac{aqdu - bpdu}{aq - bp} - \left( \frac{aqdu - abdv}{aq - bp} \right) = bdy$$

$$\frac{aqdu - bpdu - aqdu + abdv}{aq - bp} = bdy$$

$$\frac{-bpdu + abdv}{aq - bp} = bdy$$

$$\frac{b(adv - pdu)}{aq - bp} = bdy$$

$$dy = \frac{adv - pdu}{aq - bp}$$

Sehingga diperoleh

$$dx = \frac{qdu - bdv}{aq - bp} \quad \text{dan} \quad dy = \frac{adv - pdu}{aq - bp} \quad (15)$$

Contoh

Tentukan apakah PD di bawah ini merupakan PD non Homogen dan Selesaikanlah

$$1. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x - y + 3}{4x - 2y + 7}$$

Penyelesaian

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y + 3}{4x - 2y + 7}$$

$$(2x - y + 3)dx - (4x - 2y + 7)dy = 0$$

Diperiksa kedua suku merupakan PD non Homogen?

$$(2x - y + 3) \leftrightarrow f(x, y) = f(kx, ky) = 2(kx) - (ky) + 3 \\ = k(2x - y) + 3$$

≠ PD homogen Karena + 3 yang tidak mengandung variable k

$$-(4x - 2y + 7) \leftrightarrow f(x, y) = f(kx, ky) = -[4(kx) - 2(ky) + 7] \\ = -[k(4x - 2y) + 7]$$

≠ PD homogen Karena + 7 yang tidak mengandung variable k

Jadi kedua suku merupakan PD non Homogen sehingga disubstitusikan ke dalam bentuk

$$u = 2x - y \leftrightarrow du = 2dx - 1dy \leftrightarrow dy = 2dx - du$$

Masukan kedalam soal

$$(2x - y + 3)dx - (4x - 2y + 7)dy = 0$$

$$(2x - y + 3)dx - (2(2x - y) + 7)(2dx - du) = 0$$

$$(u + 3)dx - (2u + 7)(2dx - du) = 0$$

$$udx + 3dx - 4udx + 2udu - 14dx + 7du = 0$$

$$-3udx + 2udu - 11dx + 7du = 0$$

$$(-3u - 11)dx + (2u + 7)du = 0$$

$$(-3u - 11)dx = -(2u + 7)du$$

$$dx = -\frac{(2u + 7)}{(-3u - 11)} du$$

$$\begin{aligned}
\int 1 dx &= - \int \frac{(2u + 7)}{(-3u - 11)} du \\
\int 1 dx + \int \frac{(2u + 7)}{(-3u - 11)} du &= 0 \\
\int 1 dx + \int \frac{2u}{(-3u - 11)} du + \int \frac{7}{(-3u - 11)} du &= 0 \\
x + -\frac{22}{9} \ln(-3u - 11) - \frac{2}{9}(-3u - 11) - \frac{7}{3} \ln(-3u - 11) &= C \\
x + -\frac{22}{9} \ln(-3(2x - y) - 11) - \frac{2}{9}(-3(2x - y) - 11) \\
&\quad - \frac{7}{3} \ln(-3(2x - y) - 11) = C \\
x + -\frac{22}{9} \ln(-6x + 3y - 11) - \frac{2}{9}(-6x + 3y - 11) \\
&\quad - \frac{7}{3} \ln(-6x + 3y - 11) = C \\
x + -\frac{43}{9} \ln(-6x + 3y - 11) - \frac{2}{9}(-6x + 3y - 11) &= C \\
9x - 43 \ln(-6x + 3y - 11) - 2(-6x + 3y - 11) &= C \\
9x - 43 \ln(-6x + 3y - 11) + 12x - 6y + 22 &= C \\
-43 \ln(-6x + 3y - 11) + 21x - 6y + 22 &= C
\end{aligned}$$

Perhatikan

$$\int \frac{2u}{(-3u - 11)} du$$

$$\text{Misal } w = -3u - 11 \leftrightarrow 3u = -11 - w \leftrightarrow u = \frac{-11-w}{3}$$

$$dw = -3du \leftrightarrow -\frac{1}{3}dw = du$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2u}{(-3u - 11)} du &= \int \frac{2\left(\frac{-11-w}{3}\right)}{w} \cdot -\frac{1}{3} dw \\
&= -\frac{2}{9} \int \frac{-11-w}{w} dw = \frac{2}{9} \left[ \int \frac{-11}{w} dw - \int 1 dw \right] \\
&= \frac{2}{9} [-11 \ln w - w] \\
&= -\frac{22}{9} \ln w - \frac{2}{9} w + C \\
&= -\frac{22}{9} \ln(-3u - 11) - \frac{2}{9}(-3u - 11) + C
\end{aligned}$$

$$\int \frac{7}{(-3u - 11)} du$$

$$= 7 \int \frac{-\frac{1}{3} dw}{w} = -\frac{7}{3} \ln w = -\frac{7}{3} \ln(-3u - 11)$$

Diperoleh penyelesaian akhir yaitu

$$-43 \ln(-6x + 3y - 11) + 21x - 6y + 22 = C$$

2.  $(2x - y + 5) dx + (x - 2y + 7) dy = 0$

Penyelesaian

Diperiksa kedua suku merupakan PD non Homogen?

$$(2x - y + 5) \leftrightarrow f(x, y) = f(kx, ky) = 2(kx) - (ky) + 5$$

$$= k(2x - y) + 5 \neq \text{homogen}$$

Karena + 5 yang tidak mengandung variable k

$$(x - 2y + 7) \leftrightarrow f(x, y) = f(kx, ky) = (kx) - 2(ky) + 7$$

$$= k(x - 2y) + 7 \neq \text{homogen}$$

Karena + 7 yang tidak mengandung variable k

Jadi kedua suku merupakan PD non Homogen sehingga disubstitusikan ke dalam bentuk

$$u = 2x - y + 5 \leftrightarrow du = 2dx - 1dy \text{ ingat } a = 2, b = -1$$

$$v = x - 2y + 7 \leftrightarrow dv = 1dx - 2dy \text{ ingat } p = 1, q = -2$$

Diperoleh

$$dx = \frac{qdu - bdv}{aq - bp} = \frac{-2du - (-1)dv}{2 \cdot (-2) - (-1) \cdot (1)} = \frac{-2du + dv}{-4 + 1} = \frac{-2du + dv}{-3}$$

$$dy = \frac{adv - pdu}{aq - bp} = \frac{2dv - 1du}{-3}$$

Maka substitusikan kedalam soal yaitu

$$(2x - y + 5) dx + (x - 2y + 7) dy = 0$$

$$u \left( \frac{-2du + dv}{-3} \right) + v \left( \frac{2dv - 1du}{-3} \right) = 0$$

$$u(-2du + dv) + v(2dv - du) = 0$$

$$-2udu + udv + 2v dv - vdu = 0$$

$$(-2u - v)du + (u + 2v)dv = 0$$

Apakah persamaah tersebut persamaan diferensial Homogen?

$$(-2u - v) \leftrightarrow f(u, v) = f(ku, kv)$$

$$= -2(ku) - kv = k(-2u - v)$$

$$(u + 2v) \leftrightarrow f(u, v) = f(ku, kv) = ku + 2(kv) = k(u + 2v)$$

Jadi kedua suku merupakan PD Homogen sehingga disubstitusikan ke dalam bentuk

$$\begin{aligned}
\frac{u}{v} = z &\leftrightarrow u = vz \leftrightarrow du = v dz + z dv \\
(-2u - v)du + (u + 2v)dv &= 0 \\
(-2vz - v)(v dz + z dv) + (vz + 2v)dv &= 0 \\
-2v^2zdz - 2vz^2dv - v^2dz - vzdv + vzdv + 2v dv &= 0 \\
-2v^2zdz - 2vz^2dv - v^2dz + 2v dv &= 0 \\
(-2vz^2 + 2v)dv - 2v^2zdz - v^2dz &= 0 \\
-2v(z^2 - 1)dv - v^2(2z + 1)dz &= 0 \\
-2v(z^2 - 1)dv = v^2(2z + 1)dz \\
\frac{-2v}{v^2} dv = \frac{(2z + 1)}{(z^2 - 1)} dz \\
-2 \int \frac{1}{v} dv = \int \frac{(2z + 1)}{(z^2 - 1)} dz \\
-2 \int \frac{1}{v} dv = \int \frac{2z}{(z^2 - 1)} dz + \int \frac{1}{(z^2 - 1)} dz \\
-2 \ln v = \ln(z^2 - 1) + \frac{1}{2} \ln(z - 1) - \frac{1}{2} \ln(z + 1) + C \\
-4 \ln v = 2 \ln(z^2 - 1) + \ln(z - 1) - \ln(z + 1) + C \\
-\ln v^4 = \ln(z^2 - 1)^2 + \ln(z - 1) - \ln(z + 1) + C \\
-\ln v^4 = \ln \frac{(z^2 - 1)^2(z - 1)}{z + 1} + C \\
\ln \frac{(z^2 - 1)^2(z - 1)}{z + 1} + \ln v^4 = C \\
\ln \frac{(z^2 - 1)^2(z - 1)v^4}{z + 1} = \ln C \\
\frac{(z^2 - 1)^2(z - 1)v^4}{z + 1} = C \\
\frac{(z^2 - 1)(z^2 - 1)(z - 1)v^4}{z + 1} = C \\
\frac{(z + 1)(z - 1)(z^2 - 1)(z - 1)v^4}{z + 1} = C \\
(z - 1)(z^2 - 1)(z - 1)v^4 = C \\
(z^2 - 1)(z - 1)^2 v^4 = C \\
\left(\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 1\right) \left(\frac{u}{v} - 1\right)^2 v^4 = C \\
\left(\frac{u^2}{v^2} - 1\right) \left(\frac{u^2}{v^2} - 2\frac{u}{v} + 1\right) v^4 = C \\
\left(\frac{u^2}{v^2} - 1\right) (u^2 v^2 - 2uv^3 + v^4) = C
\end{aligned}$$

$$u^4 - 2u^3v + u^2v^2 - u^2v^2 + 2uv^3 - v^4 = C$$

$$u^4 - 2u^3v + 2uv^3 - v^4 = C$$

$$(2x - y + 5)^4 - 2(2x - y + 5)^3(x - 2y + 7) + 2(2x - y + 5)(x - 2y + 7)^3 - (x - 2y + 7)^4 = C$$

Perhatikan

$$u = z^2 - 1 \leftrightarrow du = 2z dz$$

$$\int \frac{2z}{(z^2 - 1)} dz = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(z^2 - 1)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(z^2 - 1)} dz &= \int \frac{\frac{1}{2}}{z - 1} dz + \int \frac{-\frac{1}{2}}{z + 1} dz \\ &= \frac{1}{2} \ln(z - 1) - \frac{1}{2} \ln(z + 1) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(z^2 - 1)} = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z + 1}$$

$$1 = A(z + 1) + B(z - 1)$$

$$1 = Az + A + Bz - B$$

$$1 = (A + B)z + (A - B)$$

diperoleh

$$A + B = 0 \leftrightarrow A = -B$$

$$\begin{aligned} A - B = 1 \leftrightarrow -B - B = 1 \leftrightarrow -2B = 1 \leftrightarrow B = -\frac{1}{2} \rightarrow A = -\left(-\frac{1}{2}\right) \\ = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Jadi persamaan diferensial homogen yaitu

$$(2x - y + 5)^4 - 2(2x - y + 5)^3(x - 2y + 7) + 2(2x - y + 5)(x - 2y + 7)^3 - (x - 2y + 7)^4 = C$$

Latihan

Selesaikan persamaan diferensial berikut

1.  $(2x + 3y + 1)dx + (4x + 6y + 1)dy = 0$
2.  $(5x + 2y + 1)dx + (2x + y + 1)dy = 0$

## E. Persamaan Diferensial Eksak

Teorema Persamaan Diferensial Eksak

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (16)$$

jika hanya jika

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \quad (17)$$

$$\text{Dengan } F(x, y)dx = \int M(x, y)dx + c(y) \quad (18)$$

Selanjutnya mencari nilai  $c(y)$  dengan persamaan

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \quad (19)$$

dimana fungsi  $M(x, y), N(x, y), \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ , dan persamaan terdefinisi dan kontinu dalam daerah terhubung sederhana.

Contoh

Tentukan apakah PD di bawah ini merupakan PD eksak atau tidak dan Selesaikanlah

1.  $y^2 dx + 2xy dy = 0$

Penyelesaian

Persamaan diferensial eksak jika memenuhi

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial y^2}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial 2xy}{\partial x} = 2y$$

Karena  $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$  maka  $y^2 dx + 2xy dy = 0$  merupakan persamaan diferensial eksak.

Penyelesaian dari persamaan ini disubstitusikan

$$F(x, y)dx = \int M(x, y)dx + c(y) = \int y^2 dx + c(y) = xy^2 + c(y)$$

Selanjutnya mencari nilai  $c(y)$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

$$\frac{\partial (xy^2 + c(y))}{\partial y} = 2xy$$

$$2xy + c'(y) = 2xy$$

$$c'(y) = 0$$

$$c(y) = \int c'(y) = C$$

Jadi penyelesaiannya  $xy^2 + c(y) = xy^2 + C$

$$2. (2x + 3y - 2)dx + (3x - 4y + 1)dy = 0$$

Penyelesaian

Persamaan diferensial eksak jika memenuhi

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(2x + 3y - 2)}{\partial y} = 3$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(3x - 4y + 1)}{\partial x} = 3$$

Karena  $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$  maka  $(2x + 3y - 2)dx + (3x - 4y + 1)dy = 0$

merupakan persamaan diferensial eksak.

Penyelesaian dari persamaan ini disubstitusikan

$$\begin{aligned} F(x, y)dx &= \int M(x, y)dx + c(y) = \int (2x + 3y - 2)dx + c(y) \\ &= x^2 + 3xy - 2x + c(y) \end{aligned}$$

Selanjutnya mencari nilai  $c(y)$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

$$\frac{\partial(x^2 + 3xy - 2x + c(y))}{\partial y} = 3x - 4y + 1$$

$$3x + c'(y) = 3x - 4y + 1$$

$$c'(y) = -4y + 1$$

$$c(y) = \int c'(y) = \int (-4y + 1)dy = -2y^2 + y + C$$

Jadi penyelesaiannya yaitu

$$x^2 + 3xy - 2x + c(y) = x^2 + 3xy - 2x - 2y^2 + y + C$$

Latihan

Tentukan apakah PD di bawah ini merupakan PD eksak atau tidak dan

Selesaikanlah

$$1. (2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0$$

$$2. ydx + (2x + ye^y)dy = 0$$

$$3. xy' + y + 4 = 0$$

## F. Faktor Integrasi

Definisi

Sebuah faktor pengali yang menjadikan suatu PD yang tidak eksak menjadi PD eksak dinamakan faktor integrasi.

Teorema Faktor Integrasi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (20)$$

Kita asumsikan bahwa PD pada bentuk umum di atas tidak eksak dan memiliki faktor integrasi  $a(x, y)$ . Sehingga berdasarkan definisi

$$a(x, y)M(x, y)dx + a(x, y)N(x, y)dy = 0 \quad (21)$$

Pada persamaan (21) merupakan PD eksak untuk mengujinya

$$\frac{\partial}{\partial y} a(x, y)M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} a(x, y)N(x, y) \quad (22)$$

Dengan menggunakan sifat turunan  $uv = u'v + uv'$

$$\frac{\partial a(x, y)}{\partial y} M(x, y) + a(x, y) \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial a(x, y)}{\partial x} N(x, y) + a(x, y) \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \quad (23)$$

### 1. Faktor Integrasi $a(x, y) = a(x) \rightarrow$ fungsi $x$ saja

Misalkan  $\frac{\partial a(x, y)}{\partial y} = 0$  maka persamaan (23) menjadi

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a(x, y)}{\partial y} M(x, y) + a(x, y) \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \\ & = \frac{\partial a(x, y)}{\partial x} N(x, y) + a(x, y) \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial a(x, y)}{\partial y} M(x, y) + a(x, y) \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \\ & = \frac{\partial a(x, y)}{\partial x} N(x, y) + a(x, y) \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \\ a(x, y) & \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - a(x, y) \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial a(x, y)}{\partial x} N(x, y) \\ a(x, y) & \left[ \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right] = \frac{\partial a(x, y)}{\partial x} N(x, y) \\ a(x, y) & \left[ \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right] \partial x = \frac{\partial a(x, y)}{\partial x} N(x, y) \\ \frac{1}{N(x, y)} & \left[ \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right] \partial x = \frac{\partial a(x, y)}{\partial x} \\ \int \frac{1}{N(x, y)} & \left[ \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right] \partial x = \int \frac{\partial a(x, y)}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{N(x,y)} \left[ \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \right] \partial x = \ln a$$

$$e^{\int \frac{1}{N(x,y)} \left[ \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \right] \partial x} = e^{\ln a}$$

$$a = e^{\int \frac{1}{N(x,y)} \left[ \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \right] \partial x}$$

$$a(x) = e^{\int f(x) \partial x} \quad (24)$$

Dimana

$$f(x) = \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)} \quad (25)$$

Contoh

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial

$$(1 - xy) dx + (xy - x^2) dy = 0$$

Penyelesaian

Persamaan diferensial eksak/ tidak jika memenuhi

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(1 - xy)}{\partial y} = -x$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(xy - x^2)}{\partial x} = y - 2x$$

Karena  $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$  maka  $(1 - xy)dx + (xy - x^2) dy = 0$

merupakan persamaan diferensial **tidak eksak**.

$$f(x) = \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$$

$$f(x) = \frac{-x - (y - 2x)}{xy - x^2} = \frac{x - y}{x(y - x)} = \frac{-(y - x)}{x(y - x)} = -\frac{1}{x}$$

$$a(x) = e^{\int f(x) dx} = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

Substitusikan factor integrasi kedalam soal

$$\underline{(1 - xy) dx + (xy - x^2) dy = 0} \text{ (dikali } \frac{1}{x} \text{)}$$

$$\frac{1}{x}(1 - xy) dx + \frac{1}{x}(xy - x^2) dy = 0$$

$$\left(\frac{1}{x} - y\right) dx + (y - x) dy = 0$$

Persamaan diferensial eksak/ tidak jika memenuhi

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{1}{x} - y\right)}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial (y - x)}{\partial x} = -1$$

Karena  $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$  maka  $\left(\frac{1}{x} - y\right) dx + (y - x) dy = 0$

merupakan persamaan diferensial **eksak**

Penyelesaian dari persamaan ini disubstitusikan

$$\begin{aligned} F(x, y) dx &= \int M(x, y) dx + c(y) = \int \left(\frac{1}{x} - y\right) dx + c(y) \\ &= \ln x - xy + c(y) \end{aligned}$$

Selanjutnya mencari nilai  $c(y)$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

$$\frac{\partial (\ln x - xy + c(y))}{\partial y} = y - x$$

$$-x + c'(y) = y - x$$

$$c'(y) = y$$

$$c(y) = \int c'(y) = \int y dy = \frac{1}{2}y^2 + C$$

Jadi penyelesaiannya yaitu

$$\ln x - xy + c(y) = C$$

$$\ln x - xy + \frac{1}{2}y^2 = C$$

$$2 \ln x - 2xy + y^2 = C$$

## 2. Faktor Integrasi $a(x, y) = a(y) \rightarrow$ *fungsi y saja*

Misalkan  $\frac{\partial a(x, y)}{\partial x} = 0$  maka persamaan (23) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(x, y)}{\partial y} M(x, y) + a(x, y) \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \\ = \frac{\partial a(x, y)}{\partial x} N(x, y) + a(x, y) \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \end{aligned}$$

Dengan langkah sama halnya faktor integrasi fungsi x saja maka diperoleh

$$a = e^{\int \frac{1}{M(x, y)} \left[ -\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right] dx}$$

$$a(y) = e^{\int f(y) dy} \quad (26)$$

Dimana

$$f(y) = \frac{-\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{M(x, y)} \quad (27)$$

Contoh

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial  
 $xydx + (1 + x^2) dy = 0$

Penyelesaian

Persamaan diferensial eksak/ tidak jika memenuhi

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(xy)}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(1 + x^2)}{\partial x} = 2x$$

Karena  $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$  maka  $xydx + (1 + x^2) dy = 0$

merupakan persamaan diferensial **tidak eksak**.

$$f(y) = \frac{-\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{M(x, y)}$$

$$f(y) = \frac{-\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{M(x, y)} = \frac{-x + 2x}{xy} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}$$

$$a(y) = e^{\int f(y)dy} = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y$$

Substitusikan factor integrasi kedalam soal

$$xydx + (1 + x^2) dy = 0$$

$$\underline{xydx + (1 + x^2) dy = 0(dikali y)}$$

$$xy^2dx + y(1 + x^2) dy = 0$$

$$xy^2dx + (y + x^2y) dy = 0$$

Persamaan diferensial eksak/ tidak jika memenuhi

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial y} = 2xy$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(y + x^2y)}{\partial x} = 2xy$$

Karena  $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$  maka  $xy^2dx + (y + x^2y) dy = 0$

merupakan persamaan diferensial **eksak**

Penyelesaian dari persamaan ini disubstitusikan

$$\begin{aligned} F(x, y)dx &= \int M(x, y)dx + c(y) = \int xy^2dx + c(y) \\ &= \frac{1}{2}x^2y^2 + c(y) \end{aligned}$$

Selanjutnya mencari nilai  $c(y)$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

$$\frac{\partial \left( \frac{1}{2} x^2 y^2 + c(y) \right)}{\partial y} = y + x^2 y$$

$$x^2 y + c'(y) = y + x^2 y$$

$$c'(y) = y$$

$$c(y) = \int c'(y) = \int y \, dy = \frac{1}{2} y^2 + C$$

Jadi penyelesaiannya yaitu

$$\frac{1}{2} x^2 y^2 + c(y) = C$$

$$\frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{2} y^2 = C$$

$$\frac{1}{2} y^2 (x^2 + 1) = C$$

### 3. Factor Integrasi $a(x, y) = a(xy) \rightarrow$ fungsi $xy$ saja

Misalkan  $a(x, y) = a(xy)$  dan  $b = xy$

$$\frac{\partial a(x, y)}{\partial x} = \frac{da}{db} \frac{db}{dx}$$

$$\frac{\partial a(x, y)}{\partial y} = \frac{da}{db} \frac{db}{dy}$$

$$\frac{\partial a(x, y)}{\partial x} = \frac{da}{db} \frac{d(xy)}{dx} = \frac{da}{db} y$$

$$\frac{\partial a(x, y)}{\partial y} = \frac{da}{db} \frac{d(xy)}{dy} = \frac{da}{db} x$$

Kemudian substitusikan ke persamaan (23)

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(x, y)}{\partial y} M(x, y) + a(x, y) \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \\ = \frac{\partial a(x, y)}{\partial x} N(x, y) + a(x, y) \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \end{aligned}$$

Dengan langkah sama halnya faktor integrasi fungsi  $x$  saja maka diperoleh

$$a = e^{\int \left[ \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{y N(x, y) - x M(x, y)} \right] db}$$

$$a(xy) = e^{\int f(xy) db} \quad (28)$$

Dimana

$$f(xy) = \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{y N(x, y) - x M(x, y)} \quad (29)$$

Contoh

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial

$$(2x^3 y^2 - y) dx + (2x^2 y^3 - x) dy = 0$$

Penyelesaian

Persamaan diferensial eksak/ tidak jika memenuhi

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(2x^3y^2 - y)}{\partial y} = 4x^3y - 1$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(2x^2y^3 - x)}{\partial x} = 4xy^3 - 1$$

Karena  $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$  maka  $(2x^3y^2 - y)dx + (2x^2y^3 - x)dy = 0$

merupakan persamaan diferensial **tidak eksak**.

$$f(xy) = \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{y N(x, y) - x M(x, y)}$$

$$f(xy) = \frac{(4x^3y - 1) - (4xy^3 - 1)}{y(2x^2y^3 - x) - x(2x^3y^2 - y)}$$

$$= \frac{4x^3y - 4xy^3}{2x^2y^4 - xy - 2x^4y^2 + xy}$$

$$= \frac{4x^3y - 4xy^3}{2x^2y^4 - 2x^4y^2}$$

$$= \frac{-4xy(y^2 - x^2)}{2x^2y^2(y^2 - x^2)} = -\frac{2}{xy}$$

$$a(xy) = e^{\int f(xy)dy} = e^{\int -\frac{2}{xy}d(xy)} = e^{-2 \ln(xy)} = e^{\ln(xy)^{-2}} = e^{\ln \frac{1}{(xy)^2}}$$

$$= \frac{1}{(xy)^2} = \frac{1}{x^2y^2}$$

Substitusikan factor integrasi kedalam soal

$$(2x^3y^2 - y)dx + (2x^2y^3 - x)dy = 0$$

$$\frac{(2x^3y^2 - y)dx + (2x^2y^3 - x)dy}{x^2y^2} = 0 \text{ (dikali } \frac{1}{x^2y^2})$$

$$\frac{1}{x^2y^2}(2x^3y^2 - y)dx + \frac{1}{x^2y^2}(2x^2y^3 - x)dy = 0$$

$$(2x - \frac{1}{x^2y})dx + (2y - \frac{1}{xy^2})dy = 0$$

Persamaan diferensial eksak/ tidak jika memenuhi

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(2x - \frac{1}{x^2y})}{\partial y} = \frac{1}{x^2y^2}$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(2y - \frac{1}{xy^2})}{\partial x} = \frac{1}{x^2y^2}$$

Karena  $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$  maka  $(2x - \frac{1}{x^2y})dx + (2y - \frac{1}{xy^2})dy = 0$

merupakan persamaan diferensial **eksak**

Penyelesaian dari persamaan ini disubstitusikan

$$\begin{aligned} F(x, y)dx &= \int M(x, y)dx + c(y) = \int \left(2x - \frac{1}{x^2y}\right) dx + c(y) \\ &= x^2 + \frac{1}{xy} + c(y) \end{aligned}$$

Selanjutnya mencari nilai  $c(y)$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

$$\frac{\partial \left(x^2 + \frac{1}{xy} + c(y)\right)}{\partial y} = 2y - \frac{1}{xy^2}$$

$$-\frac{1}{xy^2} + c'(y) = 2y - \frac{1}{xy^2}$$

$$c'(y) = 2y$$

$$c(y) = \int c'(y) = \int 2y dy = y^2 + C$$

Jadi penyelesaiannya yaitu

$$x^2 + \frac{1}{xy} + c(y) = C$$

$$x^2 + \frac{1}{xy} + y^2 = C$$

Latihan

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial eksak/ non eksak

1.  $(x^2 + y^2 + x)dx + xy dy = 0$
2.  $dy + 2xydx = xdx$
3.  $(2y^2 + 3x)dx + 2xy dy = 0$

## G. Persamaan Diferensial Linear Order 1

Persamaan diferensial linier order satu dengan variabel tak bebas  $y$  dan variabel bebas  $x$ , dapat di tulis dalam bentuk umum:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (30)$$

Mempunyai factor integral

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} \quad (31)$$

Penyelesaian umum persamaan diferensialnya

$$ye^{\int P(x)dx} - e^{\int P(x)dx}Q(x)dx = 0 \quad (32)$$

Atau

$$y\mu(x) = \int \mu(x)Q(x)dx + C$$

Adapun Langkah-langkah menentukan PDL Orde r1

1. Tuliskan kedalam bentuk umum PDL Order 1
2. Tentukan factor integralnya
3. Integrasikan hasil perkalian  $\mu(x)$  dan  $Q(x)$

$$\int \mu(x)Q(x)dx \quad (33)$$

4. Tuliskan kedalam penyelesaian umum

Contoh

Selesaikan PDL Order 1 berikut ini

1.  $x \frac{dy}{dx} + (x + 1)y = x^3$

Penyelesaian

$$x \frac{dy}{dx} + (x + 1)y = x^3$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{(x + 1)}{x}y = x^2$$

Maka diketahui  $P(x) = \frac{(x+1)}{x}$ ,  $Q(x) = x^2$

Mempunyai factor integral

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{(x+1)}{x}dx} = e^{\int (1+\frac{1}{x})dx} = e^{(x+\ln x)} \\ &= e^x e^{\ln x} = e^x x = x e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \mu(x)Q(x)dx &= \int x e^x x^2 dx = \int e^x x^3 dx \\ &= e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C \end{aligned}$$

Perhatikan: Diselesaikan dengan metode Parsial

$$\begin{aligned}
\int u \, dv &= u \cdot v - \int v \, du = x^3 e^x - \int e^x 3x^2 dx \\
&= x^3 e^x - \{3x^2 e^x - \int e^x 6x dx\} \\
&= x^3 e^x - 3x^2 e^x + \int e^x 6x dx \\
&= x^3 e^x - 3x^2 e^x + \{6x e^x - \int e^x 6 dx\} \\
&= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6 e^x + C \\
&= e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C
\end{aligned}$$

Parsial 1

$$u = x^3 \leftrightarrow du = 3x^2 dx$$

$$dv = e^x dx \leftrightarrow v = \int e^x dx = e^x$$

Parsial 2

$$u = 3x^2 \leftrightarrow du = 6x dx$$

$$dv = e^x dx \leftrightarrow v = \int e^x dx = e^x$$

Parsial 3

$$u = 6x \leftrightarrow du = 6 dx$$

$$dv = e^x dx \leftrightarrow v = \int e^x dx = e^x$$

Jadi penyelesaian umum PDL Order 1 yaitu

$$y\mu(x) = \int \mu(x)Q(x)dx + C$$

$$yxe^x = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$$

$$y = \frac{e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)}{xe^x} + C$$

$$y = \frac{(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)}{x} + C$$

$$y = x^2 - 3x + 6 - \frac{6}{x} + C$$

2.  $\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = 6x^2$

Penyelesaian

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{3}{x}\right)y = 6x^2$$

Maka diketahui  $P(x) = \frac{3}{x}$ ,  $Q(x) = 6x^2$

Mempunyai factor integral

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

$$\int \mu(x)Q(x)dx = \int x^3 6x^2 dx = \int 6x^5 dx = x^6$$

Jadi penyelesaian umum PDL Orde 1 yaitu

$$y\mu(x) = \int \mu(x)Q(x)dx + C$$

$$yx^3 = x^6 + C$$

$$yx^3 - x^6 = C$$

Latihan

Selesaikan penyelesaian umum PDL Orde 1 berikut

1.  $x \frac{dy}{dx} + y = e^x, x > 0$
2.  $x^2 dy + xy dx = (x - 1)^2 dx$
3.  $\frac{dy}{dx} + (\tan x) y = \cos^2 x$

## H. Persamaan Diferensial Bernoulli

Persamaan diferensial Bernoulli yang dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (34)$$

Apabila  $n \neq 0,1$  maka dapat diubah menjadi  $v = y^{1-n}$  dan  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} \frac{dv}{dx}$  persamaan Bernoulli berubah menjadi PD linier tingkat satu

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x) \quad (35)$$

Dengan penyelesaian umum berbentuk

$$ve^{(1-n) \int P(x)dx} = (1-n) \int e^{(1-n) \int P(x)dx} Q(x)dx$$

$$y^{1-n} e^{(1-n) \int P(x)dx} = (1-n) \int e^{(1-n) \int P(x)dx} Q(x)dx \quad (36)$$

Adapun Langkah penyelesaian

1. Reduksilah PD Bernoulli itu dengan transformasi  $v = y^{1-n}$
2. Gunakan langkah PD linier orde satu untuk menyelesaikannya.
3. Gantilah  $v$  dengan transformasi semula untuk mendapatkan penyelesaian umum PD Bernoulli

Contoh

Seselaikan  $y' + y = xy^3$

Penyelesaian

Berdasarkan  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$  maka  $P(x) = 1, Q(x) = x, n = 3$

Langkah 1: Reduksilah PD Bernoulli itu dengan transformasi

$$v = y^{1-n} = y^{1-3} = y^{-2}$$

Langkah 2: Gunakan langkah PD linier orde satu untuk menyelesaikannya

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$$

$$\frac{dv}{dx} + (1-3)1 \cdot v = (1-3)x$$

$$\frac{dv}{dx} - 2v = -2x$$

Langkah 3: Gantilah  $v$  dengan transformasi semula untuk mendapatkan penyelesaian umum PD Bernoulli

Dengan penyelesaian umum berbentuk

$$y^{1-n} e^{(1-n) \int P(x)dx} = (1-n) \int e^{(1-n) \int P(x)dx} Q(x)dx$$

$$y^{-2} e^{-2 \int 1 dx} = -2 \int e^{(-2) \int 1 dx} x dx$$

$$y^{-2}e^{-2x} = -2 \int e^{-2x} x dx$$

$$y^{-2}e^{-2x} = -2 \left( -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right) + C$$

$$y^{-2}e^{-2x} = x e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

$$y^{-2}e^{-2x} = \left( x + \frac{1}{2} \right) e^{-2x} + C$$

Sehingga diperoleh penyelesaian akhir

$$y^{-2} = x + \frac{1}{2} + C$$

Perhatikan

$$u = x \leftrightarrow du = dx$$

$$dv = e^{-2x} dx \leftrightarrow v = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int e^{-2x} x dx = x \left( -\frac{1}{2} e^{-2x} \right) - \int -\frac{1}{2} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x}$$

Latihan

Selesaikan persamaan diferensial Bernoulli berikut

1.  $y' - y = -y^2$
2.  $x^2 y' + 2xy = y^3$
3.  $xy dx + (x^2 - 3y) dy = 0$
4.  $xy' + y + x^2 e^x y^2 = 0$

## I. Persamaan Diferensial Riccati

Persamaan diferensial Riccati yang dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^2 + R(x) \quad (37)$$

Jika  $y_1$  adalah fungsi yang memenuhi persamaan Riccati, dapat dibuktikan bahwa dengan substitusi  $y = y_1 + \frac{1}{u}$  D akan diperoleh PD linier tingkat satu

$$\frac{du}{dx} + (2y_1(x)Q(x) - P(x))u = -Q(x) \quad (38)$$

Dengan penyelesaian umum berbentuk

$$u e^{\int (2y_1(x)Q(x) - P(x)) dx} = - \int e^{\int (2y_1(x)Q(x) - P(x)) dx} Q(x) dx$$

$$\frac{1}{y - y_1} e^{\int (2y_1(x)Q(x) - P(x)) dx} = - \int e^{\int (2y_1(x)Q(x) - P(x)) dx} Q(x) dx \quad (39)$$

Jika  $R(x) = 0$ , maka persamaan menjadi persamaan Bernoulli. Jika  $R(x) \neq 0$ , penyelesaian umum dicari dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Jika satu penyelesaian khusus yang sudah diketahui, misal  $y_1 = u$ , dikarenakan itu dipunyai

$$\frac{du}{dx} = P(x)u^2 + Q(x)u + R(x)$$

2. Disubstitusikan  $y = u + \frac{1}{z}$  dengan derivatifnya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left( u + \frac{1}{z} \right) \leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx}$$

Kebersamaan Riccati sampai diperoleh :

$$\frac{dz}{dx} = -2uzP(x) - P(x) - zQ(x)$$

Diperoleh persamaan diferensial tingkat satu  $z$  :

$$\frac{dz}{dx} + 2uzP(x) + zQ(x) = -P(x)$$

$$\frac{dz}{dx} + (2uP(x) + Q(x))z = -P(x)$$

Merupakan persamaan diferensial linier orde 1, dan dapat diselesaikan dengan mencari faktor integrasinya dengan cara yang telah dipelajari sebelumnya.

3. Setelah solusi didapatkan, substitusikan  $y = u + \frac{1}{z}$ , Jadi dengan langkah terakhir tadi didapatkan solusi untuk persamaan diferensial Riccati

Contoh

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 2xy + 2$$

Dengan  $y = 2$  adalah penyelesaian khususnya.

Penyelesaian

Diketahui suatu penyelesaian khusus  $y = u(x) = 2$

Misalkan  $y = u + \frac{1}{z} = 2 + \frac{1}{z}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left( 2 + \frac{1}{z} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx}$$

Substitusikan  $y = 2 + \frac{1}{z}$  dan  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx}$  ke PD Riccati

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y^2 - 2xy + 2 \\ -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} &= \left(2 + \frac{1}{z}\right)^2 - 2x \left(2 + \frac{1}{z}\right) + 2 \\ -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} &= 4 + \frac{4}{z} + \frac{1}{z^2} - 4x - \frac{2x}{z} + 2 \\ -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} &= (4 - 4x + 2) + \left(\frac{4}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{2x}{z}\right) \\ -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} &= \frac{dv}{dx} + \left(\frac{4}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{2x}{z}\right) \\ -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} &= \left(\frac{4}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{2x}{z}\right) \\ \frac{dz}{dx} &= -4z - 1 + 2xz \\ \frac{dz}{dx} + 4z - 2xz &= -1 \\ \frac{dz}{dx} + (4 - 2x)z &= -1 \end{aligned}$$

Merupakan PD linear order-1, mempunyai faktor integrasi :

$$e^{\int(4-2x)dx} = e^{4x-x^2}$$

PD dapat ditulis sebagai :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} + (4 - 2x)z &= -1 \\ dz + (4 - 2x)z dx &= -dx \end{aligned}$$

Kalikan PD dengan faktor integrasi :

$$\begin{aligned} e^{4x-x^2} dz + e^{4x-x^2} (4 - 2x)z dx &= -e^{4x-x^2} dx \\ d(e^{4x-x^2})z &= -e^{4x-x^2} dx \\ e^{4x-x^2} &= \int -e^{4x-x^2} dx \\ e^{4x-x^2} &= -e^{4x-x^2} + C \\ C &= 2e^{4x-x^2} \end{aligned}$$

Jadi, solusi untuk PD :  $\frac{dy}{dx} = y^2 - 2xy + 2$  yaitu  $C = 2e^{4x-x^2}$

Latihan

Selesaikan persamaan diferensial Riccati berikut

1.  $\frac{dy}{dx} = y^2 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x}$  dengan  $y_1 = -x^2, x > 0$
2.  $\frac{dy}{dx} + y^2 + 2y = 0$  dengan  $y_1 = -2$



## BAB 4 PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDER 2

### A. Pengantar Persamaan Diferensial Linear Order 2

Persamaan diferensial linear Homogen order 2 merupakan sebuah fungsi yang dapat dituliskan dalam bentuk

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \quad (1)$$

Dimana  $a(x), b(x), c(x)$  dan  $d(x)$  adalah fungsi-fungsi kontinu dalam  $x$  yang didefinisikan pada domain  $I$  dan  $a(x) \neq 0$  dalam  $I$

Jika  $d(x) = 0$  maka persamaan (1) merupakan persamaan diferensial linier tak homogen order 2.

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad (2)$$

### B. Persamaan Diferensial Linear Homogen Order 2 dengan Koefisien Konstan

Diasumsikan  $a(x) \neq 0$  untuk sebarang  $x$  dalam domain, maka bentuk persamaan diferensial menjadi

$$y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad (3)$$

Dimana  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, y' = \frac{dy}{dx}$  dengan  $b(x), c(x)$  merupakan bilangan riil.

Misalkan

$$y = Ae^{mx} \leftrightarrow \frac{dy}{dx} = Ame^{mx} \leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = Am^2e^{mx}$$

Maka

$$\begin{aligned} y'' + b(x)y' + c(x)y &= 0 \\ Am^2e^{mx} + bAme^{mx} + cAe^{mx} &= 0 \\ m^2 + bm + c &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Membentuk persamaan kuadrat, yang akar-akar kuadratnya  $m_1, m_2$  dengan  $y = Ae^{m_1x}$  dan  $y = Be^{m_2x}$ . maka solusi untuk Persamaan Diferensial Linier Homogen Order 2 dapat ditulis

$$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x} \quad (5)$$

Persamaan kuadrat ini dikatakan persamaan tambahan (*Auxiliary Equation*) solusi Persamaan Diferensial Linier Homogen Order 2 sangat tergantung dari jenis akar-akar persamaan tambahan. Ada tiga jenis solusi untuk Persamaan Diferensial Linier Homogen Order 2, yaitu :

- **Akar real dan berbeda (Determinan > 0)**

Untuk akar real berbeda maka solusinya adalah

$$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x} \quad (6)$$

Contoh

Tentukanlah penyelesaian umum persamaan diferensial linear

1.  $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

Persamaan karakteristiknya  $m^2 + 5m + 6 = 0$

$$(m + 2)(m + 3) = 0$$

$$m_1 = -2 \text{ atau } m_2 = -3$$

Maka penyelesaian umumnya PDL Homogen Order 2 yaitu

$$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$$

$$y = Ae^{-2x} + Be^{-3x}$$

2.  $y'' - 2y' - y = 0$

Persamaan karakteristiknya  $m^2 - 2m - 1 = 0$

$$m_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m_{12} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$m_1 = 1 + \sqrt{2} \text{ atau } m_2 = 1 - \sqrt{2}$$

Maka penyelesaian umumnya PDL Homogen Order 2 yaitu

$$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$$

$$y = Ae^{(1+\sqrt{2})x} + Be^{(1-\sqrt{2})x}$$

• **Akar real dan sama (Determinan = 0)**

Untuk akar real berbeda maka solusinya adalah

$$y = Ae^{m_1x} + Bxe^{m_2x} \tag{7}$$

Dengan  $m_1 = m_2$

Contoh

Tentukanlah penyelesaian umum persamaan diferensial linear

1.  $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$

Persamaan karakteristiknya  $m^2 + 6m + 9 = 0$

$$(m + 3)(m + 3) = 0$$

$$m_1 = -3 \text{ atau } m_2 = -3$$

Maka penyelesaian umumnya PDL Homogen Order 2 yaitu

$$y = Ae^{m_1x} + Bxe^{m_2x}$$

$$y = Ae^{-3x} + Bxe^{-3x}$$

$$2. y'' + 8y' + 16y = 0, ,$$

Persamaan karakteristiknya  $m^2 + 8m + 16 = 0$

$$(m + 4)(m + 4) = 0$$

$$m_1 = -4 \text{ atau } m_2 = -4$$

Maka penyelesaian umumnya PDL Homogen Order 2 yaitu

$$y = Ae^{m_1x} + Bxe^{m_2x}$$

$$y = Ae^{-4x} + Bxe^{-4x}$$

• **Akar real Komplek (Determinan < 0)**

Untuk akar real kompleks maka solusinya adalah

$$y = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x) \quad (8)$$

Contoh

Tentukanlah penyelesaian umum persamaan diferensial linear

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 9y = 0$$

Persamaan karakteristiknya  $m^2 + 4m + 9 = 0$

Dengan  $a = 1, b = 4, c = 9$

$$m_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m_{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 36}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{-20}}{2} = \frac{-4 \pm 2j\sqrt{5}}{2} = -2 \pm j\sqrt{5}$$

Karena  $m_{12} = \alpha \pm \beta j$  dengan  $\alpha = -2, \beta = \sqrt{5}$

Maka penyelesaian PDL Homogen Order 2 umumnya yaitu

$$y = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

$$y = e^{-2x}(A \cos \sqrt{5}x + B \sin \sqrt{5}x)$$

Latihan

Tentukanlah penyelesaian umum persamaan diferensial linear Homogen Orde 2 berikut

$$1. \frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 36y = 0$$

$$2. 2\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

$$3. \frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$$

$$4. \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

### C. Persamaan Diferensial Linear Non Homogen Order 2

Persamaan diferensial linear Non Homogen order 2 merupakan sebuah fungsi yang dapat dituliskan dalam bentuk persamaan (1)

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

Jika  $d(x) \neq 0$  maka substitusi  $y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$  akan membuat sisi kiri diatas sama dengan nol. Maka:

$$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x} + C, C \text{ merupakan fungsi tambahan}$$

$$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x} \rightarrow \text{fungsi komplemen}$$

$$y = x \rightarrow \text{integral khusus}$$

Langkah menentukan penyelesaian PDL Non Homogen Order 2 yaitu

1. Menentukan solusi umum Persamaan Diferensial Linier Homogen biasa disebut fungsi komplemen ( $y_1$ )
2. Menentukan solusi umum Persamaan Diferensial non homogen biasa disebut Integral khusus ( $y_2$ )
3. Menentukan solusi umum Persamaan Diferensial

$$y = y_1 + y_2 \quad (9)$$

Tabel 4.1 Himpunan bebas linier koefisien tak tentu dari suku non homogen

No	Suku Non Homogen [d(x)]	Himpunan Koefisien tertentu
1	C, Konstanta	C
2	$x^n$	$x^n + x^{n-1} + \dots + 1$
3	$e^{an}$	$Ae^{an}$
4	$c \cos at$ atau $c \sin at$	$A \cos at + B \sin at$
5	$e^{an} \cdot \cos at$ atau $e^{an} \cdot \sin at$	$Ce^{an}[A \cos at + B \sin at]$
6	$x^n e^{an}$	$x^n e^{an} + x^{n-1} e^{an} + \dots + e^{an}$
7	$x^n \cos at$ atau $x^n \sin at$	$x^n [A \cos at + B \sin at]$ $+ x^{n-1} [A \cos at$ $+ B \sin at] + \dots$ $+ [A \cos at$ $+ B \sin at]$
8	$x^n e^{an} \cos at$ atau $x^n e^{an} \sin at$	$x^n e^{an} [A \cos at + B \sin at]$ $+ x^{n-1} e^{an} [A \cos at + B \sin at]$ $+ \dots + e^{an} [A \cos at + B \sin at]$

Contoh

1. Tentukan penyelesaian dari  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 1$

Penyelesaian

Langkah 1: menentukan solusi umum PD linier homogen.

Persamaan karakteristiknya  $m^2 + 1 = 0 \leftrightarrow m_{12} = \pm\sqrt{-1} = \pm j$

Karena  $m_{12} = \alpha \pm \beta j$

Maka penyelesaian umumnya yaitu

$$y_1 = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

$$y_1 = e^{0x}(A \cos x + B \sin x) = A \cos x + B \sin x$$

Langkah 2: Menentukan solusi umum PD linier Non Homogen.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 1$$

Maka  $y_2 = 1$

Langkah 3: Menentukan solusi umum Persamaan Diferensial

$$y = y_1 + y_2 = A \cos x + B \sin x + 1$$

2. Tentukan penyelesaian dari  $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x^2$

Penyelesaian

Langkah 1: menentukan solusi umum PD linier homogen.

Persamaan karakteristiknya

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

$$(m - 2)(m - 3) = 0$$

$$m_1 = 2 \text{ dan } m_2 = 3$$

Maka penyelesaian PDL Homogen umumnya yaitu

$$y_1 = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$$

$$y_1 = Ae^{2x} + Be^{3x}$$

Langkah 2: Menentukan solusi umum PD linier Non Homogen

Karena  $d(x) = x^2$  maka  $y = Cx^2 + Dx + E$

$$\frac{dy}{dx} = 2Cx + D$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2C$$

Substitusikan ke persamaan soal

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x^2$$

$$2C - 5(2Cx + D) + 6(Cx^2 + Dx + E) = x^2$$

$$2C - 10Cx - 5D + 6Cx^2 + 6Dx + 6E = x^2$$

$$6Cx^2 + (6D - 10C)x + (2C - 5D + 6E) = x^2$$

$$6C = 1 \leftrightarrow C = \frac{1}{6}$$

$$6D - 10C = 0 \leftrightarrow 6D - 10\left(\frac{1}{6}\right) = 0 \leftrightarrow 6D = \frac{5}{3} \leftrightarrow D = \frac{5}{18}$$

$$2C - 5D + 6E = 0 \leftrightarrow 2\left(\frac{1}{6}\right) - 5\left(\frac{5}{18}\right) + 6E = 0$$

$$\leftrightarrow 6E = -\frac{1}{3} + \frac{25}{18} = \frac{-6 + 25}{18} \leftrightarrow E = \frac{19}{18} \times \frac{1}{6} = \frac{19}{108}$$

Jadi  $y = Cx^2 + Dx + E$

$$y_2 = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}$$

Langkah 3: Menentukan solusi umum Persamaan Diferensial

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = Ae^{2x} + Be^{3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}$$

3. Tentukan penyelesaian dari  $y'' - y' = 3 \cos 2x$

Penyelesaian

Langkah 1: menentukan solusi umum PD linier homogen.

Persamaan karakteristiknya

$$m^2 - m = 0$$

$$m(m - 1) = 0$$

$$m_1 = 0 \text{ dan } m_2 = 1$$

Maka penyelesaian PDL Homogen umumnya yaitu

$$y_1 = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$$

$$y_1 = Ae^0 + Be^x$$

$$y_1 = A + Be^x$$

Langkah 2: Menentukan solusi umum PD linier Non Homogen

Karena  $d(x) = 3 \cos 2x$  maka  $y = C \cos 2x + D \sin 2x$

$$y' = -2C \sin 2x + 2D \cos 2x$$

$$y'' = -4C \cos 2x - 4D \sin 2x$$

Substitusikan ke persamaan soal

$$y'' - y' = 3 \cos 2x$$

$$-4C \cos 2x - 4D \sin 2x - (-2C \sin 2x + 2D \cos 2x) = 3 \cos 2x$$

$$-4C \cos 2x - 4D \sin 2x + 2C \sin 2x - 2D \cos 2x = 3 \cos 2x$$

$$(-4C - 2D) \cos 2x + (2C - 4D) \sin 2x = 3 \cos 2x$$

Diperoleh persamaan

$$-4C - 2D = 3 \rightarrow x1 \leftrightarrow -4C - 2D = 3$$

$$\underline{2C - 4D = 0 \rightarrow x2 \leftrightarrow 4C - 8D = 0 (+)}$$

$$-10D = 3$$

$$D = -\frac{3}{10}$$

$$2C - 4D = 0 \leftrightarrow 2C = 4\left(-\frac{3}{10}\right) \leftrightarrow C = -\frac{12}{10} \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{5}$$

Jadi  $y = C \cos 2x + D \sin 2x$

$$y_2 = -\frac{3}{5} \cos 2x - \frac{3}{10} \sin 2x$$

Langkah 3: Menentukan solusi umum Persamaan Diferensial

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = A + Be^x - \frac{3}{5} \cos 2x - \frac{3}{10} \sin 2x$$

4. Tentukan penyelesaian dari  $y'' + 2y' - 3y = 4e^{-3x}$

Penyelesaian

Langkah 1: menentukan solusi umum PD linier homogen.

Persamaan karakteristiknya

$$m^2 + 2m - 3 = 0$$

$$(m + 3)(m - 1) = 0$$

$$m_1 = -3 \text{ dan } m_2 = 1$$

Maka penyelesaian PDL Homogen umumnya yaitu

$$y_1 = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$$

$$y_1 = Ae^{-3x} + Be^x$$

Langkah 2: Menentukan solusi umum PD linier Non Homogen

Karena  $d(x) = 4e^{-3x}$  maka  $y = Ce^{-3x}$

$$y' = -3Ce^{-3x}$$

$$y'' = 9Ce^{-3x}$$

Substitusikan ke persamaan soal

$$y'' + 2y' - 3y = 4e^{-3x}$$

$$9Ce^{-3x} + 2(-3Ce^{-3x}) - 3Ce^{-3x} = 4e^{-3x}$$

$$9Ce^{-3x} - 6Ce^{-3x} - 3Ce^{-3x} = 4e^{-3x}$$

$$0 = 4e^{-3x}$$

Ini tidak mungkin karena fungsi eksponensial tidak pernah nol. Hal ini karena persamaan karakteristik persamaan diferensial ini adalah

Jadi  $m_1 = -3$  adalah akarnya, oleh karena itu  $e^{-3x}$  adalah solusi homogen, sehingga tidak mungkin  $y = Ae^{-3x}$ .

Misalkan  $y = Axe^{-3x}$

$$y' = Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x} = (1 - 3x)Ae^{-3x}$$

$$y'' = -3Ae^{-3x} - 3(1 - 3x)Ae^{-3x}$$

$$= -3Ae^{-3x} - 3Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x}$$

$$= -6Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x}$$

$$= (-6 + 9x)Ae^{-3x}$$

Substitusikan ke persamaan soal

$$y'' + 2y' - 3y = 4e^{-3x}$$

$$-6Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x} + 2(Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x}) - 3Axe^{-3x} = 4e^{-3x}$$

$$-4Ae^{-3x} = 4e^{-3x}$$

Jadi

$$-4A = 4 \leftrightarrow A = -1$$

Sehingga diperoleh  $y_2 = -xe^{-3x}$

Langkah 3: Menentukan solusi umum Persamaan Diferensial

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = Ae^{-3x} + Be^x - xe^{-3x}$$

5. Tentukan penyelesaian dari  $y'' - 5y' - 6y = e^{-x} - 2 \cos x$

Penyelesaian

Langkah 1: menentukan solusi umum PD linier homogen.

Persamaan karakteristiknya

$$m^2 - 5m - 6 = 0$$

$$(m + 1)(m - 6) = 0$$

$$m_1 = -1 \text{ dan } m_2 = 6$$

Maka penyelesaian PDL Homogen umumnya yaitu

$$y_1 = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$$

$$y_1 = Ae^{-x} + Be^{6x}$$

Langkah 2: Menentukan solusi umum PD linier Non Homogen

Karena  $d(x) = e^{-x} - 2 \cos x$  maka

$$y = Cxe^{-x} + D \cos x + E \sin x$$

$$y' = Ce^{-x} - Cxe^{-x} - D \sin x + E \cos x$$

$$y'' = -Ce^{-x} - Ce^{-x} + Cxe^{-x} - D \cos x - E \sin x$$

Substitusikan ke persamaan soal

$$y'' - 5y' - 6y = e^{-x} - 2 \cos x$$

$$\begin{aligned} -Ce^{-x} - Ce^{-x} + Cxe^{-x} - D \cos x - E \sin x - 5(Ce^{-x} - Cxe^{-x} \\ - D \sin x + E \cos x) - 6(Cxe^{-x} + D \cos x + E \sin x) \\ = e^{-x} - 2 \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -Ce^{-x} - Ce^{-x} + Cxe^{-x} - D \cos x - E \sin x - 5Ce^{-x} + 5Cxe^{-x} \\ + 5D \sin x - 5E \cos x - 6Cxe^{-x} - 6D \cos x - 6E \sin x \\ = e^{-x} - 2 \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -Ce^{-x} - Ce^{-x} + Cxe^{-x} - D \cos x - E \sin x - 5Ce^{-x} + 5Cxe^{-x} \\ + 5D \sin x - 5E \cos x - 6Cxe^{-x} - 6D \cos x - 6E \sin x \\ = e^{-x} - 2 \cos x \end{aligned}$$

$$-7Ce^{-x} + (-7D - 5E) \cos x + (5D - 7E) \sin x = e^{-x} - 2 \cos x$$

Diperoleh persamaan

$$-7C = 1 \leftrightarrow C = -\frac{1}{7}$$

$$-7D - 5E = -2 \rightarrow x5 \leftrightarrow -35D - 25E = -10$$

$$\underline{5D - 7E = 0 \rightarrow x7 \leftrightarrow 35D - 49E = 0 (+)}$$

$$-74E = -10$$

$$E = \frac{10}{74} = \frac{5}{37}$$

$$5D - 7E = 0 \leftrightarrow D = \frac{7}{5}E = \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{37} = \frac{7}{37}$$

Sehingga diperoleh

$$y_2 = -\frac{1}{7}xe^{-x} + \frac{7}{37}\cos x + \frac{5}{37}\sin x$$

Langkah 3: Menentukan solusi umum Persamaan Diferensial

$$y = y_1 + y_2 = Ae^{-x} + Be^{6x} - \frac{1}{7}xe^{-x} + \frac{7}{37}\cos x + \frac{5}{37}\sin x$$

#### D. Menggunakan Variabel Komplek Pada PD Order 2

Selain dari metode koefisien tak tentu, persamaan diferensial order dua tertentu dapat juga diselesaikan dengan menggunakan variabel kompleks. Pandanglah lagi persamaan  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$  (1), dengan mengubah  $d(x)$  sebagai fungsi variabel kompleks, solusi khusus  $Y$  memenuhi hal-hal sebagai berikut:

- Bagian riil  $Y$  adalah solusi persamaan (1) dengan  $d(x)$  digantikan oleh bagian riilnya.
- Bagian imajiner  $Y$  adalah solusi persamaan (1) dengan  $d(x)$  digantikan oleh bagian imajineranya.

Contoh

Tentukan solusi khusus persamaan diferensial

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x$$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan persamaan ini, pandanglah persamaan diferensial

$$y'' - 3y' + 2y = e^{ix}$$

Dimana

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

dengan menggunakan metode koefisien tak-tentu yaitu perhatikanlah suku tak homogen PD

$$d(x) = e^{ix} \leftrightarrow y = (A + Bi)e^{ix}$$

$$\frac{dy}{dx} = (A + Bi)e^{ix}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -(A + Bi)e^{ix}$$

Substitusikan ke dalam soal

$$y'' - 3y' + 2y = e^{ix}$$

$$-(A + Bi)e^{ix} - 3(A + Bi)ie^{ix} + 2(A + Bi)e^{ix} = e^{ix}$$

$$-Ae^{ix} - Bie^{ix} - 3Aie^{ix} - 3Bi^2e^{ix} + 2Ae^{ix} + 2Bie^{ix} = e^{ix}$$

$$-Ae^{ix} - Bie^{ix} - 3Aie^{ix} + 3Be^{ix} + 2Ae^{ix} + 2Bie^{ix} = e^{ix}$$

$$-3Aie^{ix} + 3Be^{ix} + Ae^{ix} + Bie^{ix} = e^{ix}$$

$$(A + 3B)e^{ix} + (-3A + B)ie^{ix} = e^{ix}$$

Diperoleh persamaan

$$A + 3B = 1 \rightarrow x3 \leftrightarrow 3A + 9B = 3$$

$$\underline{-3A + B = 0 \rightarrow x1 \leftrightarrow -3A + B = 0 (+)}$$

$$10B = 3$$

$$B = \frac{3}{10}$$

$$A + 3B = 1 \leftrightarrow A = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\text{Jadi } y = (A + Bi)e^{ix} = \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\right)e^{ix} = \frac{1}{10}e^{ix} + \frac{3}{10}ie^{ix}$$

$$= \frac{1}{10}(\cos x + i \sin x) + \frac{3}{10}i(\cos x + i \sin x)$$

$$= \frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{10}i \sin x + \frac{3}{10}i \cos x + \frac{3}{10}i^2 \sin x$$

$$= \frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{10}i \sin x + \frac{3}{10}i \cos x - \frac{3}{10}\sin x$$

$$= \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x + i\left(\frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x\right)$$

Karena  $x + iy$  maka bagian imajiner  $y$  adalah

$$y = \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x$$

Latihan

Selesaikan Persamaan diferensial orde dua berikut ini.

1.  $y'' - 2y' + y = 3e^{2x}$
2.  $y'' - 2y' + y = x^2 - 1$
3.  $y'' - 2y' + y = 4 \cos x$
4.  $y'' - 2y' + y = xe^x$

## E. Metode Variasi Parameter

Diberikan persamaan diferensial linear non homogen order dua pada persamaan (1) yaitu

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

Misalkan fungsi komplemen persamaan diferensial diatas adalah  $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$  dengan  $c_1, c_2$  sebarang konstanta. Metode di dalam variasi parameter adalah dengan mengganti konstanta  $c_1, c_2$  dengan fungsi  $v_1, v_2$  yang akan dicari kemudian sehingga  $y = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$  akan menjadi integral khusus persamaan diferensial diatas.

$$y = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$$

$$y' = v_1'(x)y_1(x) + v_1(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2(x) + v_2(x)y_2'(x)$$

Jika diambil  $v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) = 0$  maka

$$y' = v_1(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2'(x)$$

Selanjutnya dapat dicari  $y''$  kemudian disubstitusikan kedalam soal sampai ditemukan  $v_1(x)$  dan  $v_2(x)$  diperoleh  $y_2$ . Dalam Menentukan solusi umum Persamaan Diferensial

$$y = y_1 + y_2 \quad (10)$$

Contoh

Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^x}$$

Penyelesaian

Persamaan karakteristiknya

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

$$(m + 1)(m + 2) = 0$$

$$m_1 = -1 \text{ dan } m_2 = -2$$

Maka penyelesaian PDL Homogen umumnya yaitu

$$y_1 = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$$

$$y_1 = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$$

Selanjutnya dengan mengganti konstanta  $c_1, c_2$  dengan fungsi  $v_1, v_2$  menjadi

$$y = v_1(x)e^{-x} + v_2(x)e^{-2x}$$

$$y' = v_1'(x)e^{-x} - v_1(x)e^{-x} + v_2'(x)e^{-2x} - 2v_2(x)e^{-2x}$$

Jika diambil

$$v_1'(x)e^{-x} + v_2'(x)e^{-2x} = 0$$

Diperoleh

$$y' = -v_1(x)e^{-x} - 2v_2(x)e^{-2x}$$

$$y'' = -v_1'(x)e^{-x} + v_1(x)e^{-x} - 2v_2'(x)e^{-2x} + 4v_2(x)e^{-2x}$$

Substitusikan kedalam soal

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^x}$$

$$-v_1'(x)e^{-x} + v_1(x)e^{-x} - 2v_2'(x)e^{-2x} + 4v_2(x)e^{-2x} + 3(-v_1(x)e^{-x} - 2v_2(x)e^{-2x}) + 2(v_1(x)e^{-x} + v_2(x)e^{-2x}) = \frac{1}{1 + e^x}$$

$$-v_1'(x)e^{-x} + v_1(x)e^{-x} - 2v_2'(x)e^{-2x} + 4v_2(x)e^{-2x} - 3v_1(x)e^{-x} - 6v_2(x)e^{-2x} + 2v_1(x)e^{-x} + 2v_2(x)e^{-2x} = \frac{1}{1 + e^x}$$

$$-v_1'(x)e^{-x} - 2v_2'(x)e^{-2x} = \frac{1}{1 + e^x}$$

Diperoleh

$$-v_1'(x)e^{-x} - 2v_2'(x)e^{-2x} = \frac{1}{1 + e^x}$$

$$v_1'(x)e^{-x} + v_2'(x)e^{-2x} = 0$$

Dengan menggunakan rumus determinan

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{1 + e^x} & -2e^{-2x} \\ 0 & e^{-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -e^{-x} & -2e^{-2x} \\ e^{-x} & e^{-2x} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{1 + e^x} e^{-2x}}{e^{-3x}} = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} -e^{-x} & \frac{1}{1 + e^x} \\ e^{-x} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -e^{-x} & -2e^{-2x} \\ e^{-x} & e^{-2x} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{1}{1 + e^x} e^{-x}}{e^{-3x}} = -\frac{e^{2x}}{1 + e^x}$$

Maka

$$v_1(x) = \int v_1'(x) dx = \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \ln(1 + e^x) + C$$

$$v_2(x) = \int v_2'(x) dx = -\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx = -(1 + e^x) + \ln(1 + e^x) + C$$

$$y = v_1(x)e^{-x} + v_2(x)e^{-2x}$$

$$y_2 = \ln(1 + e^x)e^{-x} + \{-(1 + e^x) + \ln(1 + e^x)\}e^{-2x} + C$$

Menentukan solusi umum Persamaan Diferensial

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

$$+ \ln(1 + e^x)e^{-x} + \{-(1 + e^x) + \ln(1 + e^x)\}e^{-2x} + C$$

Perhatikan

$$\begin{vmatrix} 1 & -2e^{-2x} \\ 1+e^x & e^{-2x} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{1+e^x} e^{-2x}$$

$$\begin{vmatrix} -e^{-x} & -2e^{-2x} \\ e^{-x} & e^{-2x} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -e^{-x}e^{-2x} - e^{-x}(-2e^{-2x}) \\ = -e^{-3x} + 2e^{-3x} = e^{-3x}$$

$$\begin{vmatrix} -e^{-x} & \frac{1}{1+e^x} \\ e^{-x} & 0 \end{vmatrix} = 0 - \frac{1}{1+e^x} e^{-x} = -\frac{1}{1+e^x} e^{-x}$$

Misal  $u = 1 + e^x \leftrightarrow du = e^x dx$

$$u - 1 = e^x$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(1+e^x) + C$$

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{e^x e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{(u-1)}{u} du \\ = \int 1 du - \int \frac{1}{u} = u - \ln u = (1+e^x) - \ln(1+e^x)$$



## BAB 5

### TRANSFORMASI LAPLACE

Persamaan Diferensial dibedakan menjadi dua yaitu Persamaan Diferensial Biasa (*ordinary differential equation*) dan Persamaan Diferensial Parsial (*partial differential equation*). Persamaan Diferensial Biasa didefinisikan sebagai suatu persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan biasa suatu fungsi yang tidak diketahui dengan dua atau lebih peubah bebas. Sedangkan Persamaan Diferensial Parsial didefinisikan sebagai suatu persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan parsial suatu fungsi yang tidak diketahui dengan dua atau lebih peubah bebas.

Setelah suatu model matematika diubah dalam bentuk persamaan diferensial, langkah selanjutnya adalah menyelesaikan persamaan diferensial tersebut dengan menentukan solusinya. Solusi persamaan diferensial adalah suatu fungsi yang memenuhi persamaan diferensial tersebut. Artinya, jika fungsi itu dan turunan-turunannya disubstitusikan ke dalam persamaan diferensial tersebut, diperoleh suatu pernyataan yang benar. Dikatakan solusi umum jika persamaan fungsi masih memuat konstanta, dan disebut solusi khusus jika tidak terdapat konstanta yang didapatkan dengan menggantikan nilai-nilai awal dan syarat batas yang diketahui.

Transformasi Laplace merupakan suatu metode operasional yang dapat digunakan secara mudah untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier. Metode ini pertama kali diperkenalkan oleh Pierre Simon Marquas De Laplace seorang matematikawan Perancis dan seorang guru besar di Paris. Dengan menggunakan Transformasi Laplace, dapat diubah beberapa fungsi umum seperti fungsi sinusoida, fungsi sinusoida teredam, dan fungsi eksponensial menjadi fungsi-fungsi aljabar variabel kompleks  $s$ . Bila persamaan aljabar dalam  $s$  dipecahkan, maka penyelesaian dari persamaan diferensial (Transformasi Laplace balik dari variabel tidak bebas) dapat diperoleh dengan menggunakan tabel transformasi Laplace.

Suatu kelebihan metode transformasi Laplace adalah bahwa metode ini memungkinkan penggunaan teknik grafis untuk meramal kinerja sistem tanpa menyelesaikan persamaan diferensial sistem. Kelebihan lain metode transformasi Laplace adalah diperolehnya secara serentak baik komponen transien maupun komponen keadaan

tunak. Secara sederhana prosedur dasar pemecahan menggunakan metode transformasi Laplace adalah:

1. Persamaan diferensial yang berada dalam kawasan waktu ( $t$ ), ditransformasikan ke kawasan frekuensi ( $s$ ) dengan transformasi Laplace. Untuk mempermudah proses transformasi dapat digunakan tabel transformasi laplace.
2. Persamaan yang diperoleh dalam kawasan  $s$  tersebut adalah persamaan aljabar dari variabel  $s$  yang merupakan operator Laplace.
3. Penyelesaian yang diperoleh kemudian ditransformasi-balikkan ke dalam kawasan waktu.
4. Hasil transformasi balik ini menghasilkan penyelesaian persamaan dalam kawasan waktu.

Adapun kegunaan Transformasi Laplace yaitu

1. Transformasi Laplace dapat digunakan untuk menyatakan model matematis dari sistem linier waktu kontinu tak ubah waktu,
2. Transformasi Laplace dapat menyelesaikan penyelesaian persamaan differensial sistem linier waktu kontinu tak ubah waktu,
3. Transformasi Laplace dapat digunakan untuk mencari kestabilan sistem linier waktu kontinu tak ubah waktu,
4. Dalam ilmu pengaturan, transformasi Laplace dinyatakan sebagai teori kontrol klasik, yang digunakan untuk mencari kestabilan sistem,
5. Transformasi Laplace dapat mencari respon atau fungsi tanggapan sistem linier waktu kontinu tak ubah waktu

## A. Pengantar Transformasi Laplace

Definisi

Misalkan  $f(t)$  merupakan suatu fungsi dari  $t$  terdefinisi untuk  $t > 0$ . Kemudian  $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$  jika ada dinamakan suatu fungsi dari  $s$  dapat dikatakan  $F(s)$ . Oleh karena itu fungsi  $F(s)$  ini dapat dinamakan transformasi laplace dari  $f(t)$  dan dinotasikan oleh " $\{L(f(t))\}$ ". Jadi

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1)$$

### Definisi

Jika  $L[f(t)] = F(s)$  maka  $f(t)$  dinamakan Transformasi Laplace Invers dari  $F(s)$  dan dinotasikan dengan  $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ . Kemudian untuk mencari nilai  $L^{-1}\{F(s)\}$ , maka kita harus mencari suatu fungsi dari  $t$  yang transformasi Laplacenya adalah  $F(s)$ .

### Contoh

1. Hitunglah transformasi laplace untuk fungsi undak satuan (unit step)  $u(t)$ .

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Penyelesaian

$$u(t) = f(t) = 1$$

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$L(u(t)) = \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \left(-\frac{1}{s} e^{-s(\infty)}\right) - \left(-\frac{1}{s} e^{-s(0)}\right) = 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

ingat :  $e^{\infty} = e^{-\infty} = 0$

2. Hitunglah transformasi laplace untuk fungsi  $f(t) = e^{-at}$

Penyelesaian

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \left(-\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)\infty}\right) - \left(-\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)0}\right)$$

$$= 0 + \frac{1}{s+a} = \frac{1}{s+a}$$

3. Hitunglah transformasi laplace untuk fungsi  $f(t) = t$

Penyelesaian

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} t dt$$

$$= \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = -\frac{t}{s} e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \left(-\frac{\infty}{s} e^{-s\infty} - \frac{1}{s^2} e^{-s\infty}\right) - \left(-\frac{0}{s} e^{-s0} - \frac{1}{s^2} e^{-s0}\right)$$

$$= 0 - \left(0 - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}$$

Perhatikan

Misalkan (Metode Parsial)

$$u = t \leftrightarrow du = dt$$

$$dv = e^{-st} dt \leftrightarrow v = \int e^{-st} dt \leftrightarrow v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

$$\int u dv = u v - \int v du$$

$$\begin{aligned} \int t e^{-st} dt &= t \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) - \int -\frac{1}{s} e^{-st} dt \\ &= -\frac{t}{s} e^{-st} + \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) \\ &= -\frac{t}{s} e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \end{aligned}$$

4. Hitunglah transformasi laplace untuk fungsi  $f(t) = \sin \omega t$

Penyelesaian

Berdasarkan rumus euler

$$\sin \omega t = \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) dt$$

$$= \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} (e^{i\omega t} e^{-st} - e^{-i\omega t} e^{-st}) dt$$

$$= \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} (e^{(-s+i\omega)t} - e^{-(s+i\omega)t}) dt$$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ \int_0^{\infty} e^{(-s+i\omega)t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(s+i\omega)t} dt \right\}$$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ \left[ \frac{1}{(-s+i\omega)} e^{(-s+i\omega)t} \right]_0^{\infty} - \left[ \frac{1}{-(s+i\omega)} e^{-(s+i\omega)t} \right]_0^{\infty} \right\}$$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ \left( \frac{1}{(-s+i\omega)} e^{(-s+i\omega)\infty} - \frac{1}{(-s+i\omega)} e^{(-s+i\omega)0} \right) - \left( \frac{1}{-(s+i\omega)} e^{-(s+i\omega)\infty} - \frac{1}{-(s+i\omega)} e^{-(s+i\omega)0} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ -\frac{1}{(-s+i\omega)} - \left( -\frac{1}{-(s+i\omega)} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ -\frac{1}{(-s+i\omega)} - \frac{1}{(s+i\omega)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega} \right\} \\
&= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{s + i\omega - (s - i\omega)}{s^2 - (i\omega)^2} \right\} \\
&= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{2i\omega}{s^2 - (i\omega)^2} \right\} = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{2i\omega}{s^2 + \omega^2} \right\} = \frac{2\omega}{s^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

Dari uraian diatas maka perhatikan Tabel 5.1 berikut

Tabel 5.1 Transformasi Laplace

No	f(t)	F(s)	No	f(t)	F(s)
1	$a$	$\frac{a}{s}$	8	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
2	$t$	$\frac{1}{s^2}$	9	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
3	$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	10	$e^{at} \cos bt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}$
4	$e^{at}$	$\frac{1}{s - a}$	11	$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s - a)^2 + b^2}$
5	$e^{-at}$	$\frac{1}{s + a}$	12	$\sin^2 t$	$\frac{2}{s(s^2 + 4)}$
6	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	13	$\cos^2 t$	$\frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)}$
7	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$			

## B. Sifat Transformasi Laplace

Adapun sifat-sifatnya diantaranya

### 1. Kombinasi Linear

Jika  $f_1(t)$  dan  $f_2(t)$  merupakan fungsi waktu yang berlainan maka

$$\begin{aligned}
L[f_1(t) + f_2(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} [f_1(t) + f_2(t)] dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t) dt \\
&= L[f_1(t)] + L[f_2(t)] \\
&= F_1(s) + F_2(s)
\end{aligned}$$

Jadi

$$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s) \quad (2)$$

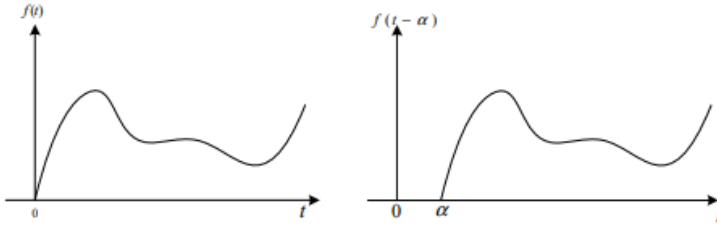
2. Translasi Fungsi

Mencari transformasi Laplace dari fungsi yang ditranslasikan

$f(t - a)$  dimana

$f(t) \rightarrow 0, t < 0$

$f(t - a) \rightarrow 0, t < a$



Karena  $f(t - a) = 0$  untuk  $0 < t < a$

Dimana  $u = t - a$

$$\begin{aligned} L(f(u)) = F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s(t-a)} f(t-a) du \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{sa} f(t-a) du \\ &= e^{sa} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-a) du \end{aligned}$$

Jadi

$$L[f(t - a)] = e^{-sa} F(s) \tag{3}$$

3. Perkalian  $f(t)$  dengan  $e^{-at}$

$$\begin{aligned} L[e^{-at} f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-at} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} f(t) dt = F(s + a) \end{aligned}$$

Jadi

$$L[e^{-at} f(t)] = F(s + a) \tag{4}$$

4. Skala Waktu  $f\left(\frac{t}{a}\right)$

Jika  $\frac{t}{a} = u$

$$L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = \int_0^{\infty} e^{-st} f\left(\frac{t}{a}\right) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} e^{-\frac{ast}{a}} f\left(\frac{t}{a}\right) d\left(\frac{t}{a}\right) \\
&= \int_0^{\infty} e^{-asu} f(u) d(u) = aF(s)
\end{aligned}$$

Jadi

$$L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(s) \quad (5)$$

## 5. Diferensiasi

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt}f(t) dt$$

Persamaan diatas dapat diintegalkan secara parsial dengan memisalkan :

$$u = e^{-st} \leftrightarrow du = -se^{-st} dt$$

$$dv = \frac{d}{dt}f(t) dt \leftrightarrow v = \int \frac{d}{dt}f(t) dt = f(t)$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt}f(t) dt = e^{-st}f(t)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -se^{-st}f(t) dt$$

$$= (e^{-s\infty}f(\infty) - e^{-s0}f(0)) + s \int_0^{\infty} e^{-st}f(t) dt$$

$$= -f(0) + sF(s)$$

$$= sF(s) - f(0)$$

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0) \quad (6)$$

Jadi untuk turunan selanjutnya

$$L\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - \frac{d}{dt}f(0) \quad (7)$$

$$L\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(0) \quad (8)$$

## 6. Integral

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[\int_0^t f(t) dt\right] dt$$

Dengan integral parsial diperoleh

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{e^{-st}}{-s} \int_0^t f(t) dt \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} f(t) dt$$

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = -\frac{1}{-s} \int_0^t f(t) dt \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} f(t) dt$$

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} f^{-1}(0) + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$L \left[ \int_0^t f(t) \right] = \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} f^{-1}(0) \quad (9)$$

### Kesimpulan

Dari sifat-sifat transformasi laplace yaitu

1.  $L(Af(t)) = AF(s)$
2.  $L[f_1(t) \pm f_2(t)] = L[f_1(t)] \pm L[f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3.  $L[e^{-at} f(t)] = F(s + a)$
4.  $L[f(t - a)] = e^{-sa} F(s)$
5.  $L \left[ f \left( \frac{t}{a} \right) \right] = aF(s)$
6.  $L \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0)$
7.  $L \left[ \frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] = s^2 F(s) - sf(0) - \frac{d}{dt} f(0)$
8.  $L \left[ \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(0)$
9.  $L \left[ \int_0^t f(t) \right] = \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} f^{-1}(0)$

### Contoh

1. Tentukan transformasi laplace dari persamaan  $f(t) = t - 5e^{-2t}$

Penyelesaian

$$L(t - 5e^{-2t}) = L(t) - 5L(e^{-2t}) = \frac{1}{s^2} - 5 \left( \frac{1}{s+2} \right) = \frac{s+2-5s^2}{s^2(s+2)}$$

Perhatikan

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$$

2. Tentukan transformasi laplace dari persamaan  $f(t) = 3t^2$

Penyelesaian

$$L(3t^2) = 3L(t^2) = 3 \frac{n!}{s^{n+1}} = 3 \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{6}{s^3}$$

3. Tentukan transformasi laplace dari persamaan  $f(t) = e^{-3t} \sin 2t$

Penyelesaian

$$L[e^{at} \sin bt] = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned} L(e^{-3t} \sin 2t) &= \frac{2}{(s+3)^2 + 4} \\ &= \frac{2}{s^2 + 6s + 9 + 4} = \frac{2}{s^2 + 6s + 13} \end{aligned}$$

4. Tentukan transformasi laplace dari persamaan  $L[10 \sin 4t + 4t^2]$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} L[10 \sin 4t + 4t^2] &= L[10 \sin 4t] + L[4t^2] \\ &= 10L[\sin 4t] + 4L[t^2] \\ &= 10 \frac{4}{s^2 + 4^2} + 4 \frac{2!}{s^{2+1}} \\ &= \frac{40}{s^2 + 16} + \frac{8}{s^3} \end{aligned}$$

Perhatikan

$$\begin{aligned} L[\sin at] &= \frac{a}{s^2 + a^2} \\ L[t^n] &= \frac{n!}{s^{n+1}} \end{aligned}$$

5. Tentukan transformasi laplace dari persamaan  $L[e^{5t}(\sin 2t - \sin 4t)]$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} L[e^{5t}(\sin 2t - \sin 4t)] &= L[e^{5t} \sin 2t - e^{5t} \sin 4t] \\ &= L[e^{5t} \sin 2t] - L[e^{5t} \sin 4t] \\ &= \frac{2}{(s-5)^2 + 2^2} - \frac{4}{(s-5)^2 + 4^2} \\ &= \frac{2}{s^2 - 10s + 25 + 4} - \frac{4}{s^2 - 10s + 25 + 16} \\ &= \frac{2}{s^2 - 10s + 29} - \frac{4}{s^2 - 10s + 41} \end{aligned}$$

Perhatikan

$$L[e^{at} \sin bt] = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

6. Tentukan transformasi laplace dari persamaan  $L[f(t)]$

$$f(t) = \begin{cases} 5, & t < 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases}$$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^3 e^{-st} \cdot 5 dt + \int_3^{\infty} e^{-st} \cdot 0 dt \\ &= 5 \int_0^3 e^{-st} dt \\ &= -\frac{5}{s} e^{-st} \Big|_0^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{5}{s}e^{-3s} - \left(-\frac{5}{s}e^{-0s}\right) \\
&= -\frac{5}{s}e^{-3s} + \frac{5}{s}
\end{aligned}$$

7. Tentukan transformasi laplace dari persamaan  $L[f(t)]$

$$f(t) = \begin{cases} \cos(t - \frac{2\pi}{3}), & t > \frac{2\pi}{3} \\ 0, & t < \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
L[f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} e^{-st} \cdot 0 dt + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\infty} e^{-st} \cdot \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) dt \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\infty} e^{-st} \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) dt
\end{aligned}$$

Perhatikan

$$u = t - \frac{2\pi}{3} \leftrightarrow du = dt$$

$$u + \frac{2\pi}{3} = t$$

$$\text{maka } t = \infty \rightarrow u = \infty$$

$$t = \frac{2\pi}{3} \rightarrow u = 0$$

$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\infty} e^{-st} \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) dt = \int_0^{\infty} e^{-s(u + \frac{2\pi}{3})} \cos u du$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-su} e^{-s\frac{2\pi}{3}} \cos u du$$

$$= e^{-s\frac{2\pi}{3}} \int_0^{\infty} e^{-su} \cos u du$$

$$= e^{-s\frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{s - (-s)}{(s - (-s))^2 + 1^2}$$

$$= e^{-s\frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{2s}{(2s)^2 + 1^2}$$

$$= e^{-\frac{2\pi s}{3}} \cdot \frac{2s}{4s^2 + 1}$$

$$= \frac{2se^{-\frac{2\pi s}{3}}}{4s^2 + 1}$$

Perhatikan

$$L[e^{at} \cos bt] = \frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}$$

Latihan

Tentukan transformasi laplace dari persamaan

1.  $L[\frac{t^2}{4}]$
2.  $L[-3e^{2t}]$
3.  $L[2e^{5t} \sin 3t]$
4.  $L[-5t^2 - 10 \cos 4t]$
5.  $L[f(t)]$  jika  $f(t) = \begin{cases} 3, & t > 5 \\ 0, & t < 5 \end{cases}$

### C. Invers Transformasi Laplace

Jika Transformasi Laplace dari  $f(t)$  adalah  $F(s) \leftrightarrow L[f(t)] = F(s)$  maka  $f(t)$  disebut invers Transformasi Laplace atau kebalikan dari Transformasi Laplace yang dinotasikan dengan

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] \tag{10}$$

Tabel 5.2 Invers Transformasi Laplace

No	$F(s)$	$f(t) = L^{-1}[F(s)]$	No	$f(t)$	$f(t) = L^{-1}[F(s)]$
1	$\frac{a}{s}$	$a$	8	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$
2	$\frac{1}{s^2}$	$t$	9	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh at$
3	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n$	10	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}$	$e^{at} \cos bt$
4	$\frac{1}{s - a}$	$e^{at}$	11	$\frac{b}{(s - a)^2 + b^2}$	$e^{at} \sin bt$
5	$\frac{1}{s + a}$	$e^{-at}$	12	$\frac{2}{s(s^2 + 4)}$	$\sin^2 t$
6	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$	13	$\frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)}$	$\cos^2 t$
7	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin at$			

Sifat Invers Transformasi Laplace diantaranya

### 1. Kelinearan

Jika  $f_1(t) = L^{-1}[F_1(s)]$  dan  $f_2(t) = L^{-1}[F_2(s)]$  maka

$$L^{-1}[C_1F_1(s) + C_2F_2(s)] = C_1L^{-1}[F_1(s)] + C_2L^{-1}[F_2(s)] \quad (11)$$

Contoh

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[\frac{8}{s^3} - \frac{5s}{s^2 + 4} + \frac{3}{s + 1}\right] &= L^{-1}\left[\frac{8}{s^3}\right] - L^{-1}\left[\frac{5s}{s^2 + 4}\right] + L^{-1}\left[\frac{3}{s + 1}\right] \\ &= 4L^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right] - 5L^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 4}\right] + 3L^{-1}\left[\frac{1}{s + 1}\right] \\ &= 4L^{-1}\left[\frac{2}{s^{2+1}}\right] - 5L^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 2^2}\right] + 3L^{-1}\left[\frac{1}{s + 1}\right] \\ &= 4t^2 - 5 \cos 2t + 3e^{-t} \end{aligned}$$

### 2. Translasi

• Jika  $f(t) = L^{-1}[F(s)]$  maka

$$L^{-1}[F(s - a)] = e^{at} f(t) = e^{at} L^{-1}[F(s)] \quad (12)$$

Contoh

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[\frac{2}{s^2 - 2s + 5}\right] &= L^{-1}\left[\frac{2}{(s^2 - 2s + 1) + 4}\right] \\ &= L^{-1}\left[\frac{2}{(s - 1)^2 + 4}\right] \\ &= L^{-1}\left[\frac{2}{(s - 1)^2 + 2^2}\right] \\ &= e^t \sin 2t \end{aligned}$$

• Jika  $f(t) = L^{-1}[F(s)]$  maka

$$L^{-1}[e^{-as}F(s)] = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases} \text{ atau } L^{-1}[e^{-as}F(s)] = \mu(t - a)f(t - a) \quad (13)$$

Contoh

Tentukan nilai  $L^{-1}\left[\frac{6e^{-2s}}{s^4}\right]$ ?

$$L^{-1}\left[\frac{6e^{-2s}}{s^4}\right] = L^{-1}\left[e^{-2s} \frac{6}{s^4}\right]$$

Karena  $L^{-1}[e^{-as}F(s)]$  maka  $a = -2, F(s) = \frac{10}{s^4}$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{6}{s^4}\right] = L^{-1}\left[\frac{6}{s^4}\right] = L^{-1}\left[\frac{3!}{s^{3+1}}\right] = t^3$$

$$f(t - a) = f(t - 2) = (t - 2)^3$$

$$L^{-1}\left[\frac{6e^{-2s}}{s^4}\right] = \mu(t - a)f(t - a) = \mu(t - 2)(t - 2)^3$$

### 3. Sifat Perubahan Skala

Jika  $f(t) = L^{-1}[F(s)]$  maka

$$L^{-1}\left[F\left(\frac{s}{a}\right)\right] = af(at) \quad (14)$$

Contoh

Tentukan nilai  $L^{-1}\left[\frac{3}{s^2+9}\right]$ ?

$$L^{-1}\left[\frac{3}{s^2+9}\right] = L^{-1}\left[\frac{3}{s^2+3^2}\right] = \sin 3t$$

#### 4. Invers Transformasi Laplace dari Derivatif

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) \text{ maka } L^{-1}[F^n(s)] = (-1)^n t^n f(t)$$

Contoh

Tentukan nilai  $L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right]$ ?

$$F(s) = \frac{1}{s-2} \text{ maka } L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] = e^{2t}$$

$$F(s) = \frac{1}{s-2} = (s-2)^{-1}$$

$$[F^1(s)] = (-1)^1 (s-2)^{-1-1} (s-2)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right] = te^{2t}$$

#### 5. Invers Transformasi Laplace dari Integral

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) \text{ maka } L^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right] = \int_0^t f(u)du$$

- **Perkalian dengan  $s^n$**

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) \text{ maka}$$

$$\text{a. } L^{-1}[sF(s)] = f'(t), f(t) = 0$$

$$\text{b. } L^{-1}[s^2F(s) - sf(0)] = f''(t), f(t) \neq 0$$

- **Pembagian dengan  $s$**

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) \text{ maka } L^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right] = \int_0^t f(u)du$$

- **Sifat Convolution**

$$L^{-1}[F(s)] = f(t), L^{-1}[G(s)] = g(t) \text{ maka } L^{-1}[F(s)G(s)] =$$

$$\int_0^t f(u)g(t-u)du \text{ atau}$$

$$L^{-1}[F(s)G(s)] = \int_0^t g(u)f(t-u)du$$

Contoh

Selesaikan invers transformasi laplace berikut

$$1. L^{-1}\left[\frac{4s-5}{\frac{3}{s^2}}\right] = L^{-1}\left[\frac{4s}{\frac{3}{s^2}} - \frac{5}{\frac{3}{s^2}}\right] = L^{-1}\left[\frac{4s}{\frac{3}{s^2}}\right] - L^{-1}\left[\frac{5}{\frac{3}{s^2}}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= 4L^{-1} \left[ \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \right] - 5L^{-1} \left[ \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \right] \\
&= 4L^{-1} \left[ \frac{1}{s^{-\frac{1}{2}+1}} \right] - 5L^{-1} \left[ \frac{1}{s^{\frac{1}{2}+1}} \right] \\
&= 4t^{-\frac{1}{2}} - 5t^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Ingat  $L^{-1} \left[ \frac{n!}{s^{n+1}} \right] = t^n$

$$\begin{aligned}
2. \quad L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2+2s} \right] &= L^{-1} \left[ \frac{1}{s(s+2)} \right] = L^{-1} \left[ \frac{\frac{1}{2}}{s} \right] + L^{-1} \left[ \frac{-\frac{1}{2}}{s+2} \right] \\
&= \frac{1}{2} L^{-1} \left[ \frac{1}{s} \right] - \frac{1}{2} L^{-1} \left[ \frac{1}{s+2} \right] = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} e^{-2t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t}
\end{aligned}$$

perhatikan

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

$$1 = A(s+2) + Bs$$

$$1 = As + 2A + Bs$$

$$1 = 2A + (A+B)s$$

$$2A = 1 \leftrightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$A + B = 0 \leftrightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad L^{-1} \left[ \frac{4}{2s-7} - \frac{4s+6}{s^2+9} + \frac{12}{s^5} \right] &= L^{-1} \left[ \frac{4}{2s-7} \right] - L^{-1} \left[ \frac{4s+6}{s^2+9} \right] + L^{-1} \left[ \frac{12}{s^5} \right] \\
&= 4L^{-1} \left[ \frac{1}{2s-7} \right] - L^{-1} \left[ \frac{4s}{s^2+9} \right] - L^{-1} \left[ \frac{6}{s^2+9} \right] + 12L^{-1} \left[ \frac{1}{s^5} \right] \\
&= 4L^{-1} \left[ \frac{1}{2(s-\frac{7}{2})} \right] - 4L^{-1} \left[ \frac{s}{s^2+9} \right] - 6L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2+9} \right] + 12L^{-1} \left[ \frac{1}{s^5} \right] \\
&= 2L^{-1} \left[ \frac{1}{(s-\frac{7}{2})} \right] - 4L^{-1} \left[ \frac{s}{s^2+9} \right] - 2L^{-1} \left[ \frac{3}{s^2+9} \right] + 12L^{-1} \left[ \frac{1}{s^5} \right] \\
&= 2e^{\frac{7}{2}t} - 4 \cos 3t - 2 \sin 3t + 12 \frac{t^4}{4!} \\
&= 2e^{\frac{7}{2}t} - 4 \cos 3t - 2 \sin 3t + \frac{t^4}{2}
\end{aligned}$$

Ingat  $L^{-1} \left[ \frac{n!}{s^{n+1}} \right] = t^n$

$$4. \quad L^{-1} \left[ \frac{5s+7}{s^2+3s+2} \right] ?$$

$$\frac{5s + 7}{s^2 + 3s + 2} = \frac{5s + 7}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 2}$$

$$5s + 7 = A(s + 2) + B(s + 1)$$

$$5s + 7 = As + 2A + Bs + B$$

$$5s + 7 = (A + B)s + (2A + B)$$

diperoleh persamaan

$$A + B = 5$$

$$2A + B = 7 \text{ (-)}$$

$$-A = -2 \leftrightarrow A = 2$$

$$A + B = 5$$

$$2 + B = 5$$

$$B = 3$$

$$L^{-1} \left[ \frac{5s + 7}{s^2 + 3s + 2} \right] = L^{-1} \left[ \frac{A}{s + 1} \right] + L^{-1} \left[ \frac{B}{s + 2} \right]$$

$$= L^{-1} \left[ \frac{2}{s + 1} \right] + L^{-1} \left[ \frac{3}{s + 2} \right]$$

$$= 2L^{-1} \left[ \frac{1}{s + 1} \right] + 3L^{-1} \left[ \frac{1}{s + 2} \right]$$

$$= 2e^{-t} + 3e^{-2t}$$

5.  $L^{-1} \left[ \frac{2s^2 + 3s + 14}{(s + 2)(s^2 + 4)} \right] ?$

$$\frac{2s^2 + 3s + 14}{(s + 2)(s^2 + 4)} = \frac{A}{s + 2} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4}$$

$$2s^2 + 3s + 14 = A(s^2 + 4) + (Bs + C)(s + 2)$$

$$2s^2 + 3s + 14 = As^2 + 4A + Bs^2 + 2Bs + Cs + 2C$$

$$2s^2 + 3s + 14 = (A + B)s^2 + (2B + C)s + (4A + 2C)$$

Diperoleh persamaan

$$A + B = 2 \leftrightarrow B = 2 - A$$

$$2B + C = 3 \leftrightarrow 2(2 - A) + C = 3 \leftrightarrow 4 - 2A + C = 3 \leftrightarrow -2A + C = -1$$

$$4A + 2C = 14$$

Menggunakan eliminasi

$$-2A + C = -1 \leftrightarrow \times 2 \rightarrow -4A + 2C = -2$$

$$4A + 2C = 14 \leftrightarrow \times 1 \rightarrow \underline{4A + 2C = 14 \text{ (+)}}$$

$$4C = 12 \leftrightarrow C = 3$$

$$-2A + C = -1$$

$$-2A + 3 = -1$$

$$-2A = -4 \leftrightarrow A = 2$$

maka  $B = 2 - A = 2 - 2 = 0$

$$\begin{aligned}
L^{-1} \left[ \frac{2s^2 + 3s + 14}{(s+2)(s^2+4)} \right] &= L^{-1} \left[ \frac{A}{s+2} \right] + L^{-1} \left[ \frac{Bs+C}{s^2+4} \right] \\
&= L^{-1} \left[ \frac{2}{s+2} \right] + L^{-1} \left[ \frac{0 \cdot s + 3}{s^2+4} \right] \\
&= 2L^{-1} \left[ \frac{1}{s+2} \right] + 3L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2+4} \right] \\
&= 2e^{-2t} + \frac{3}{2} \sin 2t
\end{aligned}$$

*Ingat*

$$L^{-1} \left[ \frac{a}{s^2 + a^2} \right] = \sin at$$

Penggunaan Transformasi Laplace umumnya digunakan untuk menyelesaikan persamaan tanpa melakukan manipulasi matematis kompleks tetapi menggunakan manipulasi Aljabar Biasa. Transformasi Laplace dapat digunakan antara lain untuk menyelesaikan permasalahan berikut :

- Bentuk Gelombang Periodik maupun tidak periodik
- Transienitas dalam rangkaian linear
- Sistem linear dengan atau tanpa umpan balik
- Vibrasi transien di dalam sistem mekanik
- Propagasi sinyal dalam sistem komunikasi
- Penyelesaian persamaan diferensial dan lainnya

### **Latihan**

Selesaikan invers transformasi laplace berikut

1.  $L^{-1} \left[ \frac{2}{s+4} \right]$
2.  $L^{-1} \left[ \frac{3s+4}{s^2+4} \right]$
3.  $L^{-1} \left[ \frac{4}{2s+4} - \frac{10}{s^4} \right]$
4.  $L^{-1} \left[ \frac{2s+5}{s^2-9} \right]$
5.  $L^{-1} \left[ \frac{3s^3+3s^2+9s+6}{s^2(s+1)} \right]$

## DAFTAR PUSTAKA

- Ayu Faradillah, Ayu Tsurayya. 2021. Pengantar Persamaan Diferensial. Jakarta: Uhamka Press
- Agus R Utomo. Matematika Lanjut. Jakarta: Jurusan Teknik Elektro Universitas Indonesia
- Deny Budi Hertanto. 2019. Diktat Matematika Terapan. Yogyakarta: Fakultas Teknik UNY
- Rochmad. 2019. Bahan Ajar Persamaan Diferensial. Semarang: Jurusan Matematika UNNES
- Nuryadi. 2018. Pengantar Persamaan Diferensial Elementer. Yogyakarta: Media Pustaka

## GLOSARIUM

- Deret: bilangan yang perubahan sukunya berdasar penjumlahan terhadap sebuah bilangan tertentu
- Diferensial: tingkat perubahan suatu fungsi atas adanya perubahan variabel bebas dari fungsi tersebut.
- Integral merupakan bentuk operasi matematika yang menjadi kebalikan (invers) dari operasi turunan dan limit dari jumlah atau suatu luas daerah tertentu
- Logaritma Natural ( $\ln$ ) : logaritma dengan basis  $e$ , yaitu sebuah konstanta yang disebut sebagai konstanta Euler.
- Parsial: berhubungan atau merupakan bagian dari keseluruhan
- Persamaan suatu pernyataan matematika dalam bentuk simbol yang menyatakan bahwa dua hal adalah persis sama
- Persamaan diferensial: persamaan matematika untuk fungsi satu variable atau lebih yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai tingkatan
- Bilangan rasional dinyatakan sebagai perbandingan dua bilangan bulat  $a$  dan  $b$ , ditulis  $a/b$  dengan syarat  $b \neq 0$ .
- Substitusi: sesuatu yang mudah diganti dengan sesuatu yang lain
- Transformasi Laplace adalah suatu metode operasional yang dapat digunakan secara mudah untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier

## INDEKS

Aljabar	10, 13, 124, 143
Convolution	139
Deret	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Diferensial	109, 111, 112, 113, 114, 115, 117, 119, 120, 121, 123, 124
Eksak	83, 84, 85, 86, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 95, 96, 97, 98, 98, 100, 101, 102, 103, 104
Eksponen	12, 110, 114, 124
Eliminasi	28, 29, 77, 142
Factor Integrasi	87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 95, 96, 97, 98, 98, 100, 101, 102, 103, 104
Hiperbolik	40, 42, 43
Homogen	65, 72, 73, 74, 75, 84, 105, 106, 107, 108, 109, 111, 112, 113, 115, 120
Non Homogen	77, 78, 79, 81, 82, 109, 110, 111, 113, 114, 115, 117, 119
Integral	10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 33, 65, 68, 96, 97, 98, 109, 119, 131, 132, 139, 145
Integral Lipat	15, 16
Integral Tertentu	13
Integral Taktentu	11, 12
Invers	10, 43, 126, 136, 137, 139, 140, 143
Kelinearan	137
Kurva	35, 36, 37, 38, 39, 41, 57, 58, 59, 60, 61, 62
Luasan	35, 36, 37, 38
Order	65, 66, 67, 68, 72, 96, 98, 103, 105, 106, 105, 106, 109, 117, 119
Order 1	65, 66, 67, 68, 72, 96, 98, 103, 105, 106, 105, 106
Order 2	105, 106, 109, 117, 119
Parsial	22
Persamaan Diferensial	123, 124
Skala Waktu	131
Sumbu	35, 36, 38, 39, 40, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64
Substitusi	20, 33, 68, 73, 74, 75, 77, 79, 81, 82, 85, 86, 89, 90, 92, 93, 101, 102, 103, 109, 111, 113, 114, 115, 116, 119, 120
Transformasi	99, 100, 124

Transformasi Laplace 123, 124, 125, 126, 129, 130, 132, 133,  
134, 136, 137, 139, 140  
Translasi 138  
Trigonometri 11, 42  
Invers Transformasi Laplace 136, 137, 139, 140  
Variable 2, 7, 65, 68, 69, 70, 71, 96, 117, 124  
Variable Komplek 117, 124  
Variasi Parameter 119  
Volume 38, 39

## BIOGRAFI

Adi Candra Kusuma, S.Pd.Si., M.Pd lahir di Brebes, Jawa Tengah pada 19 Februari 1989. Tahun 2010 mendapatkan gelar Sarjana Pendidikan Sains (S.Pd.Si) Dari Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Sains Dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta. Tahun 2014 mendapatkan gelar Magister Pendidikan (M.Pd) dari Pascasarjana Pendidikan Matematika Universitas Negeri Semarang. Pengalaman menjadi Dosen sejak 2015 – 2020 di PTS Kota Tegal Jawa Tengah. Tahun 2021 sebagai Dosen di Jurusan Teknik Elektro Politeknik Negeri Malang. Adapun Pengalaman Mata Kuliah yang pernah diampu selama menjadi dosen yaitu Matematika 1, Matematika Teknik Aljabar Linear & Matrik, Praktikum Statistik Bisnis, Matematika Akuntansi, Metodologi Riset. Buku ISBN yang sudah dihasilkan berjudul aljabar Linear & Matrik, Statistika.

Dr. Kristina Widjajanti, S.Si., M.Pd., lahir di Kota Malang, Jawa Timur pada 20 Desember 1971. Tahun 1995 mendapat gelar Sarjana Sains (S.Si.) dari Program Studi Matematika, Fakultas MIPA Universitas Brawijaya. Tahun 2010 mendapat gelar Magister Pendidikan (M.Pd.) dari Program Studi S2 Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Malang. Tahun 2019 mendapat gelar Doktor (Dr.) dari Program Studi S3 Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Malang. Penulis adalah dosen di Jurusan Teknik Elektro Politeknik Negeri Malang sejak Tahun 1998. Pengalaman mengajar pada Mata Kuliah Matematika Teknik, Statistika dan Probabilitas, Metodologi Penelitian, dan Medan Elektromagnetik. Buku ajar yang telah diterbitkan adalah Pengantar Metodologi Penelitian (ISBN: 978-602-7957-44-2).

